РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СПЕЦИАЛЬНАЯ АСТРОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ

П Р Е П Р И Н Т № 208

З. О. Коркмазова, Р. А. Кочкаров

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ПОКРЫТИЯ ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА ЭЙЛЕРОВЫМИ ПОДГРАФАМИ

Нижний Архыз

2005

УДК 519.1

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ПОКРЫТИЯ ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА ЭЙЛЕРОВЫМИ ПОДГРАФАМИ

З. О. Коркмазова, Р. А. Кочкаров

Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия,
г.Черкесск, Карачаево-Черкесия, Россия, 369000

Аннотация. Настоящая работа посвящена теории фрактальных и предфрактальных графов и многокритериальной оптимизации. Проводится исследование задачи нахождения числа эйлеровых циклов на предфрактальном графе.

Ключевые слова: многокритериальная задача, эйлеров подграф, ребро, n- вершинный граф, эйлеров цикл.

MULTICRITERIA PROBLEM OF PREFRACTAL GRAPH COVERING BY EILER SUBGRAPHS

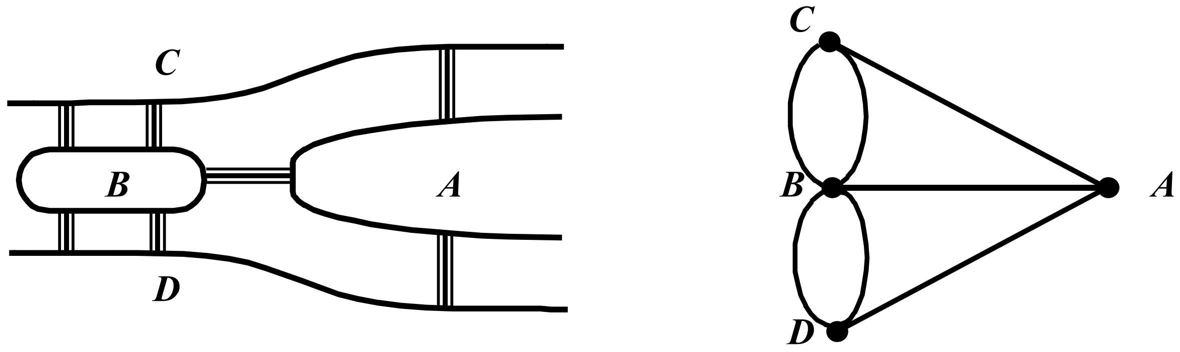
Z. O. Korkmazova, R. A. Kochkarov

Abstract. The paper is dedicated to fractal and prefractal graph theory and multicriteria optimization. A problem of finding number of Eiler cycles in prefractal graph is studied.

Keywords: multicriteria problem, Eiler subgraph, edge, n-vertex graph, Eiler cycle

1. Эйлеровы графы и задача “китайского почтальона”

В 1741 г. Леонардом Эйлером была опубликована работа [1], которая заложила основу всей современной теории графов [2,3,4].



А) *Б*)

***Рис.* 1.1.** *а*) Карта Кенигсберга, *б*) эквивалентный граф.

В ней была рассмотрена одна задача, так называемая *задаха о Кёнигсберских мостах* [1]. Кёнигсберг (теперь Калининград) расположен на обоих берегах реки Преголя и на двух островах этой реки. Берега реки и два острова соединены семью мостами, как показано на карте на рис. 1.1 (*А*).

Вопрос, поставленный в 1736 г., состоит в том, можно ли, начав с некоторой точки, совершить прогулку и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Если каждый берег реки и острова считать вершиной графа, а каждый мост – ребром, то карту на рас. 1.1 (*А*) можно представить в виде графа, изображенного на рис. 1.1 (*Б*).

Если дан неориентированный граф G, то *эйлеров цикл* (*эйлерова цепь*) – это такой цикл (цепь), который проходит ровно один раз по каждому ребру.

Ответ на поставленный ранее вопрос зависит от существования на графе, изображенном на рис. 1.1 (*Б*), эйлерова цикла. Эйлер установил, что указанный граф не содержит эйлерова цикла, и именно этот результат ознаменовал рождение теории графов [3].

Сразу же следует сформулировать ряд вопросов, связанных с тем, имеется ли в неориентированном графе эйлеров цикл. Например:

(I) Какое наименьшее число цепей или циклов необходимо для того, чтобы каждое ребро графа *G* содержалось точно в одной цепи или в одном цикле? Очевидно, что если *G* имеет эйлерову цепь или эйлеров цикл, то ответом будет число один.

(II) Ребрам графа *G* приписаны положительные веса. Требуется найти цикл, проходящий через каждое ребро графа *G, по крайней мере, один раз* и такой, что для него общий вес (а именно сумма величин $n_j c(a_j)$, где число n_j показывает, сколько раз проходилось ребро a_j, а $c(a_j)$ – вес ребра) минимален. Очевидно, что если *G* содержит эйлеров цикл, то любой такой цикл будет оптимальным, так как каждое ребро проходится только один раз и вес этого цикла равен тогда $\sum_{j=1}^{m} c(a_j)$.

Сформулированная выше задача (II) называется задачей *китайского почтальона* [5], и ее решение имеет много потенциальных приложений, как например:

(A) **Сбор мусора.** Рассмотрим проблему сбора домашнего мусора. Допустим, что определенный район города обслуживается единственной машиной. Ребра графа *G* представляют дороги, а вершины – пересечения дорог. Величина $c(a_j)$ – вес ребра – будет соответствовать длине дороги. Тогда проблема сбора мусора в данном районе сводится к нахождению цикла в графе *G,* проходящего по каждому ребру *G,* по крайней мере, один раз. Требуется найти цикл с наименьшим километражем. В действительности емкость машины и продолжительность рабочего дня накладывают ограничения на число улиц, которые может обслужить одна машина за день. То, что действительно может требоваться, – это не нахождение отдельного цикла, а некоторого числа *Q* циклов, обслуживаемых по одному в день, скажем, за период в *Q* дней; при этом циклы могут быть выбраны так, что не нарушаются вышеупомянутые ограничения [].

(Б) **Доставка молока или почты.** Еще две задачи, когда требуется определить маршрут, проходящий хотя бы один раз по каждой из улиц, возникает при доставке молока или почты. Здесь задача состоит в нахождении маршрута, минимизирующего общий километраж (или время, стоимость и т. д.).

(В) **Проверка электрических, телефонных или железнодорожных линий.** Проблема инспектирования распределенных систем (некоторые из них названы выше) связана с непременным требованием проверки всех «компонент». Поэтому она также является проблемой типа (II) или близка к ней.

Другие приложения могут быть связаны с разбрасыванием смеси песка и соли на главных дорогах зимой для предотвращения обледенения, с наилучшим методом работы автоматических вентиляционных устройств, с уборкой помещений и коридоров в больших учреждениях и даже с наилучшим маршрутом осмотра музея.

2. Фрактальные и предфрактальные графы

Термином *затравка* условимся называть какой-либо связный граф $H=(W,Q)$. Для определения *фрактального (предфрактального) графа* [1] нам потребуется операция *замены вершины затравкой (ЗВЗ)*. Суть операции ЗВЗ заключается в следующем. В данном графе $G=(V,E)$ у намеченной для замещения вершины $\tilde{v}\in V$ выделяется множество $\tilde{V}=\{\tilde{v}_j\}\subseteq V$, $j=1,2,...,|\tilde{V}|$ смежных ей вершин. Далее из графа G удаляется вершина $\tilde{v}$ и все инцидентные ей ребра. Затем каждая вершина $\tilde{v}_j\in\tilde{V}$, $j=1,2,...,|\tilde{V}|$, соединяется ребром с одной из вершин затравки $H=(W,Q)$. Вершины соединяются произвольно (случайным образом) или по определенному правилу, при необходимости.

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L=(V_L,E_L)$, где V_L – множество вершин графа, а E_L – множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l=1,2,...,L-1$ графе $G_l=(V_l,E_l)$ каждую его вершину затравкой $H=(W,Q)$. На этапе $l=1$ предфрактальному графу соответствует затравка $G_1=H$. Об описанном процессе говорят, что *предфрактальный граф* $G_L=(V_L,E_L)$ *порожден затравкой* $H=(W,Q)$. Процесс порождения предфрактального графа G_L, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов $G_1,G_2,...,G_l,...,G_L$, называемой *траекторией*. Фрактальный граф $G=(V,E)$, порожденный затравкой $H=(W,Q)$, определяется бесконечной траекторией.

Предфрактальный граф $G_L=(V_L,E_L)$ условимся называть (n,q,L)-*графом*, если он порожден n-вершинной q-реберной связной затравкой $H=(W,Q)$, и (n,L)-*графом*, если затравка $H=(W,Q)$ – регулярный граф.

Использование операции ЗВЗ в процессе порождения предфрактального графа G_L, для элементов $G_l=(V_l,E_l)$, $l\in\{1,2,...,L-1\}$, его траектории позволяет ввести отображение $\varphi:V_l\to V_{l+1}$ или $\varphi(V_l)=V_{l+1}$, а в общем виде

$$\varphi^t(V_l)=V_{l+t},\quad t=1,2,...,L-l. \tag{1}$$

В выражении (1) множество V_{l+t} – *образ* множества V_l, а множество V_l – *прообраз* множества V_{l+t}.

Для предфрактального графа G_L, ребра, появившиеся на l-ом, $l\in\{1,2,...,L\}$ этапе порождения, будем называть *ребрами ранга* l. *Новыми* ребрами предфрактального графа G_L назовем ребра ранга L, а все остальные ребра назовем – *старыми*.

Если из предфрактального графа G_L, порожденного n-вершинной затравкой H, последовательно удалить все старые ребра (ребра ранга l, $l=1,2,...,L-1$), то исходный граф распадется на множество связных компонент $\{B_L^{(1)}\}$, каждая из которых изоморфна [2] затравке H. Множество компонент $\{B_L^{(1)}\}$ будем называть *блоками первого ранга*. Аналогично, при удалении из предфрактального графа G_L всех старых ребер рангов $l = 1,2,..., L-2$, получим множество *блоков* $\{B_L^{(2)}\}$ *второго ранга*. Обобщая, скажем, что при удалении из предфрактального графа G_L всех ребер рангов $l = 1,2,..., L-r$, получим множество $\{B_{L,i}^{(r)}\}$, $r \in \{1,2,..., L-1\}$ *блоком* r*-го ранга*, где $i = 1,2,..., n^{L-r}$ – порядковый номер блока. Блоки $B_L^{(1)} \subseteq G_L$ первого ранга также будем называть *подграф-затравками* H предфрактального графа G_L. Очевидно, что всякий блок $B_L^{(r)} = (U_L^{(r)}, M_L^{(r)})$, $r \in \{1,2,..., L-1\}$, является предфрактальным графом $B_r = (U_r, M_r)$, порожденным затравкой H.

Уточним для отображения φ в формуле (1.1) ряд подробностей. Для любой вершины $v_j \in V_l$, $j \in \{1,2,..., n^l\}$ предфрактального графа $G_l = (V_l, E_l)$, $l \in \{1,2,..., L-1\}$, из траектории графа G_L, справедливо

$$\varphi^t(v_j) = U_{l+t,j}^{(t)}, \tag{2}$$

$$\varphi^t(v_j) = B_{l+t,j}^{(t)}, \text{ где } B_{l+t,j}^{(t)} = (U_{l+t,j}^{(t)}, M_{l+t,j}^{(t)}) \subseteq G_{l+t}, \quad t = 1,2,..., L-l.$$

Аналогично,

$$\varphi^t(U_{l,i}^{(r)}) = U_{l+t,i}^{(r+t)}, \tag{3}$$

$$\varphi^t(B_{l,i}^{(r)}) = B_{l+t,i}^{(r+t)}, \ r \in \{1,2,..., L-t\}, \ i \in \{1,2,..., n^{l-r}\}.$$

Два блока предфрактального графа назовем *смежными*, если существует ребро, вершины которого принадлежат различным блокам. Не требует доказательства тот факт, что блоки предфрактального графа смежны тогда и только тогда, когда смежны их прообразы из (2).

Утверждение 1. Всякий предфрактальный граф G_L можно представить в виде множества подграф-затравок $\{B_L^{(1)}\}$, соединенных старыми ребрами разных рангов. А именно, старые ребра $(L-1)$-го ранга объединяют множество подграф-затравок в множество блоков $\{B_L^{(2)}\}$ второго ранга, их в свою очередь, старые ребра $(L-2)$-го ранга объединяют в множество блоков $\{B_L^{(3)}\}$ третьего ранга и т.д. Окончательно, старые ребра первого ранга объединяют множество $\{B_L^{(L-1)}\}$ блоков $(L-1)$-го ранга в связный предфрактальный граф G_L. ◄

Термином *подграф-затравка* $z_s^{(l)}$ будем называть блок $B_{l,s}^{(1)}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$ первого ранга предфрактального графа G_l, $l=\overline{1,L}$ из траектории. Последовательное выделение подграф-затравок $z_s^{(l)}$ на графах $G_1, G_2, ..., G_L$ из траектории предфрактального графа G_L разбивает множество ребер E_L на непересекающиеся подмножества подграф-затравок $Z(G_L)=\{z_s^{(l)}\}$, где $l=\overline{1,L}$, – ранг подграф-затравки, а $s=\overline{1,n^{l-1}}$ – ее порядковый номер. Такое разбиение на подмножества позволит нам сохранить информацию смежности старых ребер на момент их появления в предфрактальном графе. В траектории переход от графа G_{l-1} к G_l осуществляется $|V_{l-1}|=n^{l-1}$ операциями ЗВЗ, поэтому общее число использованных затравок в порождении предфрактального графа G_L равно $1+n+n^2+...+n^{L-1}=\dfrac{n^L-1}{n-1}$. Тогда мощность множества $Z(G_L)$ всех подграф-затравок из траектории графа G_L также равна $|Z(G_L)|=\dfrac{n^L-1}{n-1}$.

На рис. 1 изображена траектория предфрактального графа $G_3=(V_3,E_3)$, порожденного затравкой $H=(W,Q)$ – полным 4-вершинным графом (см. рис. 1 *А*). Самыми “жирными” линиями нарисованы ребра подграф-затравки $z_1^{(1)}$.

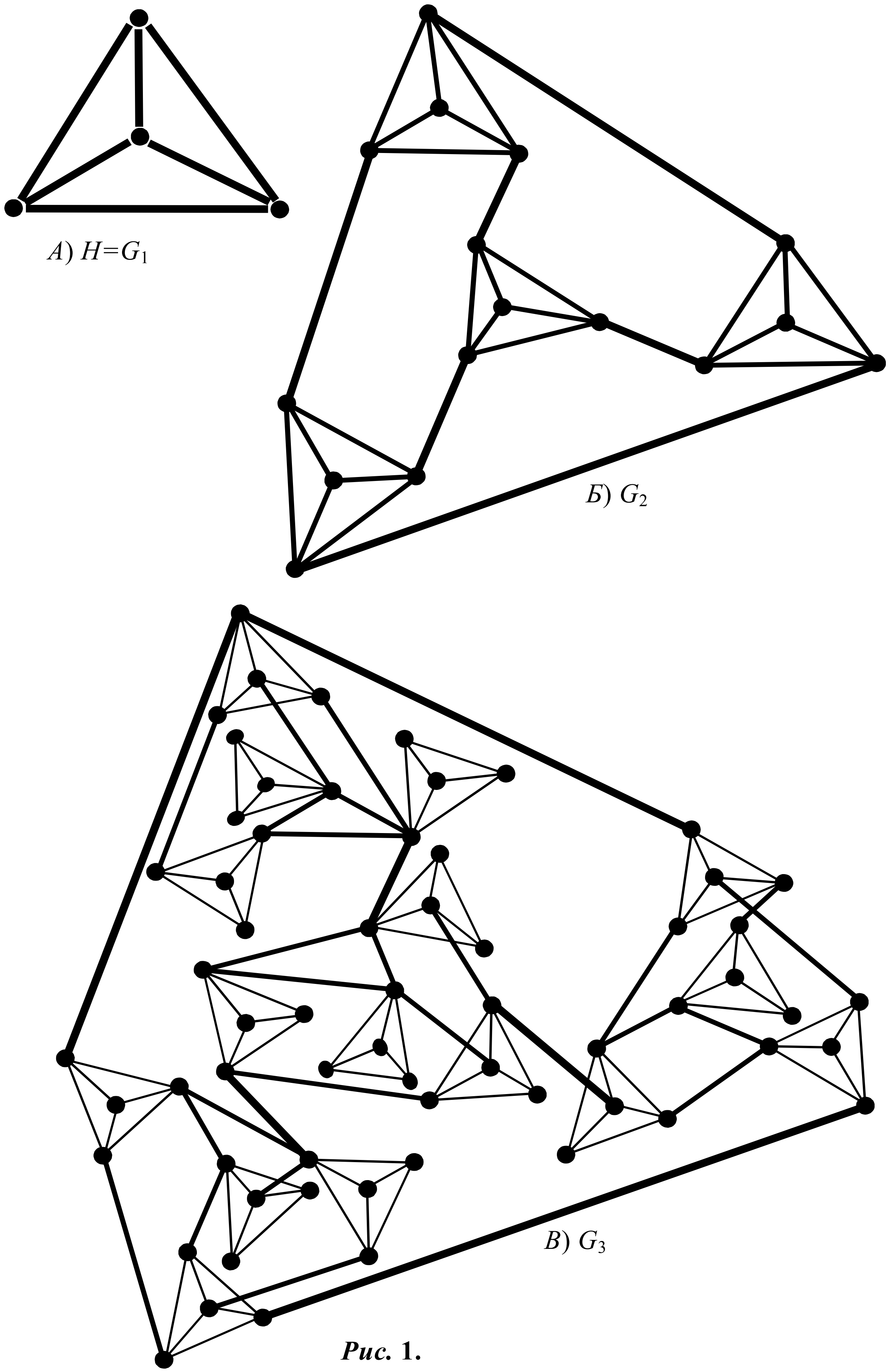


***Рис.* 1.**

Будем говорить, что *предфрактальный граф* $G_L = (V_L, E_L)$ *взвешен*, если каждому его ребру $e^{(l)} \in E_L$ приписано действительное число $w(e^{(l)}) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$, где $l = \overline{1, L}$ – ранг ребра, $a > 0$, и $\theta < \frac{a}{b}$.

Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа G_L является такой случай, когда вместо единственной затравки H используется множество затравок $\mathbf{H} = \{H_t\} = \{H_1, H_2, ..., H_t, ..., H_T\}$, $T \geq 2$. Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина замещается некоторой затравкой $H_t \in \mathbf{H}$, которая выбирается случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры.

3. Многокритериальная задача покрытия предфрактального графа эйлеровыми подграфами

Пусть $M_{n,R} = \{G\}$ – множество всевозможных предфрактальных графов G с n-вершинной затравкой, взвешенных числами $w(e) \in \{1,2,..., R\}$. Обозначим $K_{R,t}{}^n$ – класс задач $F = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ покрытия циклами предфрактальных графов $G \in M_{n,R}$. Пусть $K_{R,t}{}^0 = \bigcup_l \bigcup_n K_{R,t}{}^n, l = (1,..., L)$ – ранг предфрактального графа G_l. Допустимое решение принято называть точкой в пространстве решений x. Для точек $x \in X$ определено численное значение критерия $F_k = F$, т.е. можно говорить об определенных на X целевых функциях $F_k(x), k = \overline{1,5}$. Каждой точке $x \in X$ соотношения $F_k = F_k(x), k = \overline{1,5}$ ставят в соответствие некоторую точку в пространстве критериев $F(X) = \{F(x) = F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x), F_5(x)), x \in X\}$.

Иными словами, эти соотношения определяют отображение $F \xrightarrow{F} F(x)$ множества X в 2-мерное евклидово пространство. Множество $F(x)$ носит название “множество достижимости” (МД) или “множество предельных возможностей”.

Эффективными или оптимальными по Парето принято называть такие решения $x \in X$, которые не улучшаемы по векторному критерию $F = (F_1, ..., F_m)$ в пределах множества всех допустимых решений многокритериальной задачи. По определению эффективные решения, составляющие паретовское множество X, векторно несравнимы между собой в том смысле, что во всякой паре $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in X$ нет доминируемого по F элемента. Эффективной или паретовской границей (П-границей) МД $F(x)$ называем отображение паретовского множества в пространство критериев, т.е. подмножество точек $F(x) = \{F(\widetilde{x}) = F_1(\widetilde{x}), ..., F_m(\widetilde{x})), \widetilde{x} \in X\}$.

В классической (1-критериальной) оптимизации задача считается решенной точно, если в X найдено хотя бы одно решение x^0, на котором значение критерия $F = F_1$ достигает требуемого экстремума, например минимума. При этом X может содержать сколь угодно мощное подмножество X^0 оптимумов задачи F, однако вопрос о выделении из X всех представителей $x^0 \in X^0$ не ставится. Аналогично в многокритериальной оптимизации не ставится вопрос о выделении из X всего паретовского множества $\widetilde{X}$. Говорят, что всякое, полученное с помощью некоторого алгоритма a подмножество $\widetilde{X}_\alpha \subseteq X$, является точным решением многокритериальной задачи, если $F(X_\alpha) = F(\widetilde{X})$, т.е. если образ выделенного $\widetilde{X}_a$ совпадает с П-границей МД $F(X)$. Нахождение точек П-границ $F(\widetilde{X})$ относится к числу очень важных и в то же время очень трудных задач дискретной оптимизации. Трудоемкость выделения из X подмножества $\widetilde{X}_\alpha$, отвечающего определению точного решения задачи $F = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$, по-видимому, существенно превосходит трудоемкость решения так называемых переборных или универсальных задач, для которых известны лишь алгоритмы экспоненциальной трудоемкости.

По указанной причине одним из наиболее актуальных является вопрос о разработке такого приближенного алгоритма а, который для определенного класса исходных данных многокритериальной задачи гарантирует получение приемлемых приближенных решений X_α за счет существенного сокращения трудоемкости, $X_\alpha \subset X$. При этом предполагается строгое математическое обоснование как границ выделенного класса исходных данных, так и оценок качества (точности) получаемых решений. Здесь речь идет об оценивании (в терминах пространства критериев $F(X)$ точности аппроксимации паретовского множества X выделенным с помощью алгоритма подмножеством $X_\alpha \subset X$.

Методология алгоритмов с оценками разрабатывалась применительно к классическим, т.е. однокритериальным задачам, которые являются частным случаем задач векторной оптимизации с множеством критериев $F = \{F_k\}, k \geq 2$. Отсюда многие, казалось бы, устоявшиеся определения и понятия в условиях многокритериальности “не работают” и по этой причине нуждаются в построении новых, более общих моделей и формальных определений. При этом предполагаем, что всегда выполняется система строгих неравенств: $\alpha_k > 0$, где $\alpha_k = \min\limits_{x \in X} \underline{F_k}(x)$.

Приведем некоторые замечания. Для каждого $F_k \in F$ выделим в X подмножество частных оптимумов $X_k^0 = \{x_k^0 / F_k(x_k^0) = \min\limits_{x \in X} F_k(x_k^0)\}$ и рассмотрим пересечение $\overline{X} = \bigcap\limits_{k=1}^{m} X_k{}^0$. Если оно непустое $(\overline{X} \neq 0)$, то тогда по определению $\widetilde{X} = \overline{X}$ и мощность множества точек П-границы $\left|F(\widetilde{X})\right| = \left|F(\overline{X})\right|$. В этом случае решение задачи $F = (F_1, F_2, ..., F_m)$ заключается в нахождении хотя бы одного элемента из множества $\overline{X}$. Если $\overline{X} = 0$, то $\left|F(\widetilde{X})\right| \geq 2$ и в случае выбора какой бы то ни было точки $\widetilde{x}_0 \in X$ в качестве окончательного решения задачи возникает противоречие или конфликтная ситуация: среди невыбранных точек найдется такая, которая по некоторому показателю качества F_{k_0} строго превосходит $\widetilde{x}_0$. Указанное противоречие порождает основную проблему многокритериальности, или в другой терминологии, проблему принятия решения.

Замечание 1. Рассмотрим подмножество $X^* \in X$ такое, что в пространстве критериев задачи F количество точек $\left|F(X^*)\right| \geq 2$ и любая пара точек из $F(X^*)$ векторно не сравнима по F, т.е. в каждой такой паре нет отношения доминируемости. При этом пересечение $X^* \cap X$ может быть пустым. Ясно, что в этом случае по отношению к точкам из X^* основная проблема многокритериальности в пределах X^* сохраняется в такой же степени, как и для паретовского множества $\widetilde{x}$.

Замечание 2. Если множество $\overline{X} = \bigcap_{k=1}^{m} X_k^o$ не пусто, то в дальнейшем точки $\overline{x} \in X$ будем называть абсолютными оптимумами. В этом случае, согласно приведенным выше определениям и равенству $\widetilde{X} = \overline{X}$, задача F решена точно, если из множества допустимых решений X выделен хотя бы один абсолютный оптимум $\overline{x} \in X$.

Пусть X_α – множество выделенных с помощью некоторого алгоритма α решений $x \in X$. Через $x_\alpha \in X_\alpha$ обозначим множество векторно не улучшаемых (в пределах X_α) решений задачи F. В соответствии с известным принципом Парето и замечанием 1.1, множество X_α, получаемое с помощью алгоритма α, называется приближенным решением задачи F. Относительная погрешность ε^α – этот результат естественно определить, рассматривая X_α как ε – сеть для точного решения $\widetilde{X}$ задачи F:

$$\varepsilon^\alpha = \varepsilon_1^\alpha, \ldots, \varepsilon_k^\alpha, \qquad (3.1.)$$

где $\varepsilon_k^{\alpha} = \max_{x \in X} \min_{x \in X} \dfrac{\left|F_k(\widetilde{X}) - F(X)\right|}{F_k(\widetilde{X})}, k = \overline{1,3}$.

Для комбинаторных задач, типа рассматриваемой задачи покрытия предфрактального графа звездами, нахождение решения X представляет непреодолимые вычислительные трудности. Поэтому вместо погрешности ε^{α} введем в рассмотрение ее верхнюю оценку $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1, ..., \bar{\varepsilon}_k$, где

$$\bar{\varepsilon}_k = \max_{x \in X} \frac{F_k(X) - a^k}{a^k}, a^k = F_k(X), k = \overline{1,3}. \qquad (3.2.).$$

Заметим, что определяемые выражениями (3.1.) и (3.2.) величины ε_k^{α} и $\bar{\varepsilon}$ характеризуют точность решения отдельной конкретной задачи, т.е. $\varepsilon_k^{\alpha} = \varepsilon_k^{\alpha}(A), \bar{\varepsilon}_k = \bar{\varepsilon}_k(A), k = \overline{1,m}$, где A – фиксированный набор ИД задачи F, т.е. всех ее параметров. Пусть $\vartheta = \{A\}$ класс рассматриваемых наборов ИД, т.е. область определения значений параметров задачи F. Тогда можно определить достижимую на ϑ оценку E^{α} точности данного алгоритма α: $E^{\alpha} = E_1^{\alpha}, ..., E_m^{\alpha}$, где $E_k^{\alpha} = \max \varepsilon_k^{\alpha}(A), k = \overline{1,m}$.

Перейдем к постановке *многокритериальной задачи покрытия предфрактального графа эйлеровыми подграфами.*

Рассмотрим взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, у которой мощность множества вершин $|W| = n$, а мощность множества ребер $|Q| = q$.

Покрытием графа G_L будем называть подграф $x = (V_L, E_x) = \{C_m\}$, $E_x \subseteq E_L$, каждая компонента C_m, $m = 1,2,...,M$ которого является эйлеровым графом. Компоненты C_m, $m = 1,2,...,M$ в покрытии x не пересекаются.

Число K_m назовем типом компоненты C_m, если подграф $C_m = (V_m, E_m)$ содержит K ребер. Другими словами K_m – длина (число ребер) цикла C_m. Цикл, ребра которого имеют одинаковый ранг l, будем называть *l-ранговым циклом* и обозначать $C^{(l)}$.

Цикл предфрактального графа G_L будем называть *i-смешанным циклом* и обозначим через C^i, если он состоит из ребер i различных рангов.

Предфрактальный граф G_L, содержащий эйлеров цикл, будем называть эйлеровым предфрактальным графом.

Всевозможные покрытия $\{x\}$ предфрактального графа G_L образуют множество допустимых решений $X = X(G_L) = \{x\}$ (МДР).

Качество покрытия x на графе G_L задается векторно-целевой функцией (ВЦФ):

$$\mathrm{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x), F_5(x)) \tag{4}$$

$$F_1(x) = |x| \to \min, \tag{5}$$

где $|x|$ – число компонент в покрытии x.

$$F_2(x) = \sum_{e \in E_x} \frac{w(e)}{|x|} \to \min, \tag{6}$$

где $\sum\limits_{e \in E_x} w(e)$ – общий (суммарный) вес покрытия x, а $F_2(x)$ – удельный вес покрытия x.

$$F_3(x) = \max_{m \in M} K_m \to \min, \tag{7}$$

где K_m – типы компонент C_m, $m = 1,2,...,M$ в покрытии.

$$F_4(x) = \deg C_m \to \min, \tag{8}$$

для всех $m = \overline{1,M}$, где $\max\limits_{v \in C_m} \deg v = \deg C_m$ – степень компоненты C_m в покрытии x.

$$F_5(x) = |C_m| \to \min, \tag{9}$$

для всех $m = \overline{1,M}$, где $|C_m|$ – число вершин компоненты C_m в покрытии x.

Все критерии (см. (5) – (9)) векторно-целевой функции (4) имеют конкретную содержательную интерпретацию.

Литература

Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И., 1990, Лекции по теории графов, М.: Наука

Харари Ф., 1973, Теория графов, М.: Мир

Кочкаров А.М., 1998, Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход, Нижний Архыз: САО РАН

Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В., 2001, Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы, Ижевск: НИЦ "РХД"

Ловас Л., Пламмер М, 1998,Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. М.: Мир

Перепелица В.А., Мамедов А.А., 1995, Исследование сложности разрешимости векторных задач на графах. Черкесск: КЧТИ.

Емеличев В.А., Перепелица В.А., 1994, Сложность дискретных многокритериальных задач . Дискретная математика. . Т. 6, вып. 1. С .3 – 33

Коркмазова З.О., Салпагаров С.И., 2001, Многокритериальная задача Эйлера на предфрактальных графах. Тез. докл. II Междунар. Конф. "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии…". Нальчик,НИИ ПМА КБНЦ РАН,. С. 7

Коркмазова З.О., Кочкаров А.М., 2001, Задача Эйлера на предфрактальных графах. Тез. докл. Междунар., Нальчик ,НИИ ПМА КБНЦ РАН

Коркмазова З.О., 2004, Многокритериальная задача разбиения на эйлеровые подграфы предфрактального графа.Черкесск, Деп. в ВИНИТИ № 1729-В2004

Коркмазова З.О., 2004, Выделение максимальных эйлеровых подграфов на предфрактальном графе.Черкесск,. Деп. в ВИНИТИ № 1731-В2004

З.О.Коркмазова, Р.А.Кочкаров

Многокритериальная задача покрытия предфрактального графа эйлеровыми подграфами

Работа поступила в печать 5 сентября 2005 г.

Уч.изд.л. - 1.0

Специальная астрофизическая обсерватория РАН