Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К
СПЕЦИАЛЬНАЯ АСТРОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ

П Р Е П Р И Н Т N 202

А. А. Узденов

ГАРАНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ p-МЕДИАН НА ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФАХ С ЗАТРАВКОЙ – ПОЛНЫМ n-ВЕРШИННЫМ ГРАФОМ, РЕБРОМ, n-ВЕРШИННОЙ ЗВЕЗДОЙ

Нижний Архыз
2004

УДК 519.1

ГАРАНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ P-МЕДИАН НА ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФАХ С ЗАТРАВКОЙ – ПОЛНЫМ n-ВЕРШИННЫМ ГРАФОМ, РЕБРОМ, n-ВЕРШИННОЙ ЗВЕЗДОЙ

А. А. Узденов

Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия,
г. Черкесск, Карачаево-Черкесия, Россия, 369000

Аннотация. В настоящей работе найдены верхняя и нижняя оценки p-медианы предфрактального (n,L)-графа $G_l=(V_l,E_l)$ с затравками: ребром, n-вершинной звездой, полным n-вершинным графом, если (n,L)-граф предфрактал – диадическое дерево. Для обоснования оценок p-медиан предложен алгоритм оптимального выделения p-медианы предфрактальных графов.
Ключевые слова: p-медиана, ребро, n-вершинная звезда, полный n-вершинный граф, диадическое дерево.

GUARANTEED ESTIMATIONS OF P-MEDIANS OF PREFRACTAL GRAPHS WITH SEEDING AGENTS – COMPLETE n-VERTEX GRAPH, EDGE, n-VERTEX STAR

A. A. Uzdenov

Abstract. In the present study the upper- and lower-bound estimates of p-medians of prefractal (n,L)-graphs $G_l=(V_l,E_l)$ with seeding agents - edge, n-vertex star, complete n-vertex graph, if prefractal (n,L)-graph is a dyadic tree, are found. An algorithm of optimum determination of p-medians of prefractal graphs is proposed.
Keywords: p-median, edge, n-vertex star, complete n-vertex graph, dyadic tree.

1. Оценки p-медиан

Рассмотрим известную задачу нахождения p-медиан (Кристофидес, 1978; Узденов, 2002; Узденов, Кочкаров, 2001) на предфрактальных графах в многокритериальном виде. В такой постановке задача нахождения p-медиан на предфрактальных графах рассматривается впервые.

В данной работе будем использовать общепринятое обозначение $G=(V,E)$ для всякого конечного или бесконечного графа (Емеличев и др., 1990; Оре, 1968; Берж, 1962). Термином “затравка” (Кочкаров, 1998; Кочкаров, Перепелица, 1999) условимся называть связный n-вершинный граф $H=(W,Q)$ с вершинами одного веса. В качестве обобщения известной операции “расщепления вершины” (Кочкаров, 1998; Кочкаров, Перепелица, 1999) определим операцию “замещения вершины затравкой” (ЗВЗ) (Кочкаров, 1998; Кочкаров, Перепелица, 1999). Суть операции ЗВЗ состоит в замещении на каждом шаге каждой вершины v_k $(k=1..|K|)$ графа $G=(V,E)$ n-вершинной затравкой H, при этом для каждого ребра, инцидентного с вершиной v_k указанная вершина замещается на некоторую вершину w из W, причем длина ребер этих затравок изменяется в k раз и т.д. на каждом шаге. Этот коэффициент k (Емеличев и др., 1990) называется коэффициентом масштабирования. На этапе $l=1$ полученный граф обозначим через $G_1=(V_1,E_1)=H=(W,Q)$. Пусть выполнены этапы $l=1,2,3,...L$ и по завершению получен граф $G_l=(V_l,E_l)$, который называем предфрактальным. При $L\to\infty$ полученный граф $G_l=(V_l,E_l)$ будем называть фрактальным графом. Число $l\ (l=\overline{1,L})$ называется рангом фрактального графа.

Припишем (сопоставим) рёбрам числа – ребру e_{ij} ставится в соответствие некоторое число c_{ij}, называемое весом (длиной) ребра. Рёбра затравки являются рёбрами 1-го ранга. Длина рёбер e_{ij} первого ранга имеет вес $c_{i,j}\in[a,b]$; длина рёбер e_{ij}^2 второго ранга имеет вес $c_{ij}^2\in[a,b]$, равный соответствующей длине рёбер первого ранга, умноженного на коэффициент масштабирования k (Емеличев и др., 1990); длина рёбер e_{ij}^3 третьего ранга имеет вес $c_{ij}^3\in[a,b]$, равный соответствующей длине рёбер второго ранга, умноженного на k и так далее. Тогда граф G_l называется графом с взвешенными рёбрами. При рассмотрении пути μ, представленного последовательностью рёбер e_{ij}, ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,s}$), за его вес принимается число $l(\mu)$, равное сумме весов всех рёбер[1], входящих в μ, то есть $l(\mu)=\sum\limits_{(x_i,x_j)\in\mu} c_{ij}$.

Рассмотрим предфрактальный (n,L)-граф $G=(V,E)$ с взвешенными рёбрами, где коэффициент масштабирования $k<1$. Пусть p_l-медиана (Кристофидес, 1978; Узденов, 2002) затравки l-го ранга – p-медиана (Узденов, 2002) l-го

[1] Каждое ребро рассматривается столько раз, сколько раз оно встречается.

ранга. p_1-медиана затравки 1-го ранга – p_l-медиана (Узденов, 2002) предфрактального (n,L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$.

Теорема 1. Для всякого предфрактального (n,L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$, $l = \overline{1,L}$, p_l-медиана оценивается:

$$(2^l - 2^{l-1}) \cdot l \cdot k^{l-1} < p_l < 2^{2\cdot(l-1)} \cdot k^{l-1},\ l = \overline{1,L}, \qquad (1)$$

если затравка – ребро.

Доказательство. Пусть дан взвешенный предфрактальный (*n,L*)-граф $G_l = (V_l, E_l)$ с затравкой – ребром. Коэффициент масштабирования $k < 1$. Причём длина рёбер l-го ранга равна соответствующей длине ребер $(l-1)$-го ранга, умноженной на коэффициент масштабирования *k*, где $l = 1,2,3,...L$. Рассмотрим два случая: 1) старые рёбра не пересекаются; 2) старые рёбра пересекаются.

Пусть старые рёбра не пересекаются, тогда на каждом ранге вычисления p_l-медиан данного предфрактального (*n,L*)-графа выполним следующим образом.

На первом ранге $l = 1$ p_1-медиана равна $p_1 = 1$. На втором ранге $l = 2$ p_2-медиана равна $p_2 = 4 \cdot k$. На третьем ранге $l = 3$ p_3-медиана равна $p_3 = 16 \cdot k^2$. На четвёртом ранге $l = 4$ p_4-медиана равна $p_4 = 64 \cdot k^3$, то есть

$$p_1 = 2^{2\cdot(1-1)} \cdot k^0 = 2^0 \cdot k^0,$$
$$p_2 = 2^{2\cdot(2-1)} \cdot k^1 = 2^2 \cdot k^1,$$
$$p_3 = 2^{2\cdot(3-1)} \cdot k^2 = 2^4 \cdot k^2,$$
$$p_4 = 2^{2\cdot(4-1)} \cdot k^3 = 2^6 \cdot k^3.$$

На пятом ранге $l = 5$ p_5-медиана равна $p_5 = 256 \cdot k^4$, то есть

$$p_5 = 2^{2\cdot(5-1)} \cdot k^4 = 2^8 \cdot k^4.$$

p_l-медиана на каждом последующем ранге увеличивается в $d = \dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{2^2 \cdot k^2}{2^0 \cdot k^1} = 2^2 \cdot k$ раз. Тогда предположим, что на ранге $l = L-1$ p_l-медиана равна

$$p_{L-1} = 2^{2\cdot((L-1)-1)} \cdot k^{L-2}.$$

Следовательно, получим, что на ранге $l = L$ p_l-медиана равна

$$p_L = p_{L-1} \cdot d = 2^{2\cdot((L-1)-1)} \cdot k^{L-2} \cdot 2^2 \cdot k^1 = 2^{2L-4+2} \cdot k^{L-2+1} = 2^{2\cdot(L-1)} \cdot k^{L-1},$$

$$p_l = 2^{2\cdot(l-1)} \cdot k^{l-1},\ l = \overline{1,L}. \qquad (2)$$

Формула (2) является верхней оценкой для p_l-медианы предфрактального (n,L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$ с затравкой – ребром.

Пусть старые рёбра пересекаются, тогда на каждом ранге вычисления p_l-медиан данного предфрактального (*n,L*)-графа выполним следующим образом. На первом ранге $l = 1$ p_1-медиана равна $p_1 = 1$. На втором ранге $l = 2$ p_2-медиана равна $p_2 = 4 \cdot k^1$. На третьем ранге $l = 3$ p_3-медиана равна $p_3 = 12 \cdot k^2$. На четвёртом ранге $l = 4$ p_4-медиана равна $p_4 = 27 \cdot k^3$. На пятом ранге $l = 4$ p_5-медиана равна $p_5 = 68 \cdot k^4$, то есть

$$p_1 = (2-1) \cdot 1 \cdot k^0,$$
$$p_2 = (2^2 - 2) \cdot 2 \cdot k^1,$$

$p_3 = (2^3 - 2^2) \cdot 3 \cdot k^2$,

$p_4 = (2^4 - 2^3) \cdot 4 \cdot k^3$,

$p_5 = (2^5 - 2^4) \cdot 5 \cdot k^4$.

p_l-медиана на каждом последующем ранге увеличивается в $d = \frac{p_2}{p_1} =$ $= \frac{(2^2 - 2^1) \cdot l \cdot k^1}{(2 - 2^0) \cdot (l-1) \cdot k^0} = \frac{l}{l-1} \cdot 2 \cdot k$ раз. Тогда предположим, что на ранге $l = L - 1$ p_l-медиана равна:

$p_{L-1} = (2^{L-1} - 2^{(L-1)-1}) \cdot (L-1) \cdot k^{L-2}$.

Следовательно, получим, что на ранге $l = L$ p_l-медиана равна:

$$p_L = p_{L-1} \cdot d = (2^{L-1} - 2^{(L-1)-1}) \cdot (L-1) \cdot k^{L-2} \cdot 2 \cdot \frac{L}{L-1} \cdot k^1 = (2^L - 2^{L-1}) \cdot L \cdot k^{L-1},$$

$$p_l = (2^l - 2^{l-1}) \cdot l \cdot k^{l-1},\ l = \overline{1, L}. \qquad (3)$$

Формула (3) является нижней оценкой для p_l-медианы предфрактального (n, L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$ с затравкой – ребром.

Сопоставляя формулы (2)-(3) для p_l-медианы предфрактального (n, L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$ получим строгое неравенство:

$$(2^l - 2^{l-1}) \cdot l \cdot k^{l-1} < p_l < 2^{2 \cdot (l-1)} \cdot k^{l-1},\ l = \overline{1, L}.$$

Теорема 2. Для всякого предфрактального (*n,L*)-графа $G_l = (V_l, E_l)$, $l = \overline{1, L}$, p_l-медиана оценивается следующим образом:

$$(n^l - n^{l-1}) \cdot l \cdot k^{l-1} < p_l < n^l \cdot 2^{l-1} \cdot k^{l-1},\ l = \overline{1, L}, \qquad (4)$$

если затравка – n-вершинная звезда.

Доказательство. Пусть дан взвешенный предфрактальный (*n,L*)-граф $G_l = (V_l, E_l)$ с затравкой – n-вершинной звездой. Коэффициент масштабирования $k < 1$. Причём длина рёбер *l*-го ранга равна соответствующей длине ребер $(l-1)$-го ранга, умноженной на коэффициент масштабирования *k*, где $l = 1, 2, 3, \dots L$. Рассмотрим два случая: 1) когда старые рёбра не пересекаются; 2) старые рёбра пересекаются.

Пусть старые рёбра не пересекаются, тогда на каждом ранге вычисления p_l-медиан данного предфрактального (*n,L*)-графа выполним следующим образом.

На первом ранге $l = 1$ p_1-медиана равна $p_1 < n \cdot 2^0$. На втором ранге $l = 2$ p_2-медиана равна $p_2 < n^2 \cdot 2 \cdot k^1$. На третьем ранге $l = 3$ p_3-медиана равна $p_3 < n^3 \cdot 2^2 \cdot k^2$. p_l-медиана на каждом последующем ранге увеличивается в $d = \frac{p_2}{p_1} = \frac{n^2 \cdot 2^1 \cdot k^2}{n \cdot 2^0 \cdot k^1} = 2 \cdot n \cdot k$ раз. Тогда предположим, что на ранге $l = L - 1$ p_l-медиана оценивается следующим образом

$p_{L-1} < n^{L-1} \cdot 2^{(L-1)-1} \cdot k^{L-2}$.

Следовательно, получим, что на ранге $l = L$ p_l-медиана оценивается следующим образом:

$$p_L < p_{L-1} \cdot d = n^{L-1} \cdot 2^{(L-1)-1} \cdot k^{L-2} \cdot 2 \cdot n \cdot k = n^L \cdot 2^{L-1} \cdot k^{L-1},$$

$$p_l < n^l \cdot 2^{l-1} \cdot k^{l-1},\ l = \overline{1,L}. \qquad (5)$$

Формула (5) является верхней оценкой p_l-медианы предфрактального (n,L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$ с затравкой – n-вершинной звездой.

Пусть старые рёбра пересекаются, тогда на каждом ранге получим следующие оценки p_l-медианы. На первом ранге $l=1$ p_1-медиана равна $p_1 = (n-1)$. На втором ранге $l=2$ p_2-медиана равна $p_2 = 2\cdot(n^2 - n)\cdot k^1$. На третьем ранге $l=3$ p_3-медиана равна $p_3 = 3\cdot(n^3 - n^2)\cdot k^2$. p_l-медиана на каждом последующем ранге увеличивается в $d = \frac{p_2}{p_1} = \frac{l\cdot(n^2-n)\cdot k^1}{(l-1)\cdot(n-n^0)\cdot k^0} = \frac{l}{l-1}\cdot n\cdot k$ раз. Тогда предположим, что на ранге $l = L-1$ p_l-медиана равна:

$$p_{L-1} = (n^L - n^{(L-1)-1})\cdot(L-1)\cdot k^{L-2}.$$

Следовательно, получим, что на ранге $l = L$ p_l-медиана равна:

$$p_L = p_{L-1}\cdot d = (n^L - n^{(L-1)-1})\cdot(L-1)\cdot k^{L-2}\cdot\frac{L}{L-1}\cdot n\cdot k = (n^L - n^{L-1})\cdot L\cdot k^{L-1},$$

$$p_L = (n^l - 2^{l-1})\cdot l\cdot k^{l-1},\ l = \overline{1,L}. \qquad (6)$$

Формула (6) является нижней оценкой p_l-медианы предфрактального (n,L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$ с затравкой – n-вершинной звездой.

Сопоставляя формулы (5)-(6) для p_l-медианы предфрактального (n,L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$, получим строгое неравенство:

$$(n^l - n^{l-1})\cdot l\cdot k^{l-1} < p_l < n^l\cdot 2^{l-1}\cdot k^{l-1},\ l = \overline{1,L}.$$

Теорема 3. Для всякого предфрактального (n,L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$, $l = \overline{1,L}$, p_l-медиана равна

$$p_l = k^{l-1} 2^{l-1},\ l = \overline{1,L}, \qquad (7)$$

если (n,L)-граф-предфрактал – диадическое дерево.

Доказательство. Пусть дан взвешенный предфрактальный (n,L)-граф $G_l = (V_l, E_l)$, если (n,L)-граф-предфрактал – диадическое дерево. Коэффициент масштабирования $k<1$. Причём длина рёбер l-го ранга равна соответствующей длине ребер $(l-1)$-го ранга, умноженной на коэффициент масштабирования k, где $l = 1,2,3,...L$.

На первом ранге p_1-медиана равна $p_1 = 1$. На втором ранге p_2-медиана равна $p_2 = 2\cdot k$. На третьем ранге p_3-медиана равна $p_3 = 4\cdot k^2$, то есть

$$p_1 = 2^0\cdot k^0,$$
$$p_2 = 2^1\cdot k^1,$$
$$p_3 = 2^2\cdot k^2.$$

p_l-медиана на каждом последующем ранге увеличивается в $d = \frac{p_2}{p_1} = \frac{2^1\cdot k^1}{2^0\cdot k^0} = 2^1\cdot k^1$ раз. Предположим, что на ранге $l = L-1$ p_l-медиана равна

$$p_{L-1} = 2^{(L-1)-1}\cdot k^{(L-1)-1}.$$

Тогда получим, что на ранге $l = L$ p_l-медиана равна

$$p_L = p_{L-1}\cdot d = 2^{(L-1)-1}\cdot k^{(L-1)-1}\cdot 2\cdot k = 2^{L-1}\cdot k^{L-1},$$

$p_l = 2^{l-1} \cdot k^{l-1}$, $l = \overline{1,L}$.

Теорема 4. Для всякого предфрактального (n,L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$, $l = \overline{1,L}$, p_l-медиана оценивается:

$$3 \cdot 2^{3\cdot(l-1)} \cdot k^{l-1} < p_l < 2^{l-1} \cdot n^l \cdot k^{l-1},\ l = \overline{1,L}, \tag{8}$$

если затравка – полный n-вершинный граф.

Доказательство. Пусть дан взвешенный предфрактальный (n,L)-граф $G_l = (V_l, E_l)$ с затравкой – полным n-вершинным графом. Коэффициент масштабирования $k < 1$. Причём длина рёбер *l*-го ранга равна соответствующей длине ребер $(l-1)$-го ранга, умноженной на коэффициент масштабирования *k*, где $l = 1,2,3,...L$. Рассмотрим два случая: 1) когда старые рёбра не пересекаются; 2) старые рёбра пересекаются.

Пусть старые рёбра не пересекаются, тогда на каждом ранге получим следующие оценки p_l-медианы.

На первом ранге p_1-медиана равна $p_1 < 2^0 \cdot n \cdot k^0$. На втором ранге p_2-медиана равна $p_2 < 2^1 \cdot n^2 \cdot k^1$. На третьем ранге p_3-медиана равна $p_3 < 2^2 \cdot n^3 \cdot k^2$. На четвёртом ранге $p_4 < 2^3 \cdot n^4 \cdot k^3$. p_l-медиана на каждом последующем ранге увеличивается в $d = \dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{2^1 \cdot n^2 \cdot k^2}{2^0 \cdot n \cdot k^1} = 2^1 \cdot n \cdot k^1$ раз. Предположим, что на ранге $l = L-1$ p_l-медиана равна:

$$p_{L-1} < 2^{(L-1)-1} \cdot n^{L-1} \cdot k^{L-2}.$$

Тогда получим, что на ранге $l = L$ p_l-медиана равна:

$$p_L < p_{L-1} \cdot d = 2^{(L-1)-1} \cdot n^{L-1} \cdot k^{L-2} \cdot 2 \cdot n \cdot k = 2^{L-1} \cdot n^L \cdot k^{L-1},$$

$$p_l < 2^{l-1} \cdot n^l \cdot k^{l-1},\ l = \overline{1,L}. \tag{9}$$

Формула (9) является верхней оценкой для p_l-медианы предфрактального (n,L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$.

Пусть старые рёбра пересекаются, тогда на каждом ранге получим следующие оценки p_l-медианы. На первом ранге p_1-медиана равна $p_1 > 3 \cdot 2^0 \cdot k^0$. На втором ранге p_2-медиана равна $p_2 > 3 \cdot 2^3 \cdot k^1$. На третьем ранге p_3-медиана равна $p_3 > 3 \cdot 2^6 \cdot k^2$. p_l-медиана на каждом последующем ранге увеличивается в $d = \dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{3 \cdot 2^3 \cdot k^1}{3 \cdot 2^0 \cdot k^0} = 2^3 \cdot k^1$ раз. Предположим, что на ранге $l = L-1$ p_l-медиана оценивается следующим образом:

$$p_{L-1} > 3 \cdot 2^{3((L-1)-1)} \cdot k^{L-2}.$$

Тогда получим, что на ранге $l = L$ p_l-медиана оценивается следующим образом:

$$p_L > p_{L-1} \cdot d = 3 \cdot 2^{3((L-1)-1)} \cdot k^{L-2} \cdot 2^3 \cdot k = 3 \cdot 2^{3\cdot(L-1)} \cdot k^{L-1},$$

$$p_l > 3 \cdot 2^{3\cdot(l-1)} \cdot k^{l-1},\ l = \overline{1,L}. \tag{10}$$

Формула (10) является нижней оценкой для p_l-медианы предфрактального (n,L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$.

Сопоставляя формулы (9)-(10) для p_l-медианы предфрактального (n,L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$, получим строгое неравенство:

$$3 \cdot 2^{3(l-1)} \cdot k^{l-1} < p_l < 2^{(l-1)} \cdot n^l \cdot k^{l-1},\ l = \overline{1,L}.$$

2. Алгоритм построения p-медианы

В данном случае предполагается, что полученные модели являются каноническими предфрактальными графами с затравкой *H*, в котором каждое ребро $e_{ij} \in E$ взвешено описанным выше методом.

Пусть X – подмножество, содержащее p вершин, множества V_l вершин предфрактального (n,L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$. Через $d(\mathrm{X}, x_i)$ будем обозначать наикратчайшее из расстояний между вершинами множества X и вершиной x_i, т.е. $d(\mathrm{X}, x_i) = \min\limits_{x_j \in \mathrm{X}} \left[d(x_j, x_i) \right]$. Пусть $\sigma(\mathrm{X}) = \sum\limits_{x_j \in V_l} d(\mathrm{X}, x_j)$ – передаточное число множества X. Множество X, для которого $\sigma(X) = \min\limits_{\mathrm{X} \subseteq V_l} [\sigma(\mathrm{X})]$, называется p-медианой предфрактального (n,L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$. На множестве X определим критерии

$$F_1(x) = [\sigma(\mathrm{X})] \to \min,$$

$$F_2(x) = \sum_{p_i \in X} c_{ij} \to \min,$$

$$F_3(x) = |X| \to \min,$$

где $F_1(x)$ – p_l-медиана, $F_2(x)$ – суммарный минимальный вес рёбер, участвующих в p_l-медианах, $F_3(x)$ – мощность множества *X*.

Решением этой задачи является паретовское множество ПМ $\tilde{X}$ (Перепелица, Мамедов, 1995). Мы будем искать полное множество альтернатив ПМА X^0, где полным множеством альтернатив называется такое $X^0 \subset \tilde{X}$, что $F(X^0) = F(\tilde{X})$, где $\tilde{X}$ – паретовское множество. Для решения этой задачи предложим следующий алгоритм α с оценками.

2.1. Алгоритм α

Задачу нахождения p-медианы (Кристофидес, 1978; Узденов, 2002) предфрактального и фрактального графа удобно выполнять следующим образом.

Вначале задачу решим для затравки.

Шаг 1. Выбрать некоторое множество X из p вершин в качестве начального приближения к p-медиане. Назовём все вершины $x_j \notin X$ “неопробованными”.

Шаг 2. Взять произвольную “неопробованную” вершину и для каждой вершины $x_i \in \mathrm{X}$ вычислить “приращение” Δ_{ij}, соответствующее замене вершины x_i вершиной x_j, т.е. вычислить $\Delta_{ij} = \sigma(X) - \sigma((X \bigcup \{x_j\}) - \{x_i\})$.

Шаг 3. Найти $\Delta_{ij} = \max\limits_{x_i} [\Delta_{ij}]$.

А) Если $\Delta_{ij} \le 0$, то назвать вершину x_j “опробованной” и перейти к шагу 2.

Б) Если $\Delta_{ij} > 0$, то $X \leftarrow (X \bigcup \{x_j\}) - \{x_i\}$, назвать вершину x_j “опробованной” и перейти к шагу 2.

Шаг 4. Повторять шаги 2 и 3 до тех пор, пока все вершины из $V - X$ не будут опробованы. Если при выполнении шага 3 А) не будет замещений вершин, то перейти к шагу 5.

Шаг 5. Стоп. Текущее множество X является оптимальным приближением к p-медиане.

Для всех затравок данного ранга поиск p-медианы аналогичен. Когда найдём p-медианы на всех затравках, получим p-медиану *l*-го ранга, т.е. p_l-медиану.

Стянем затравки *l*-го ранга в вершины, т.е. заменим вершины затравки одной вершиной v_{l-1} и все рёбра, инцидентные вершинам затравки, будут инцидентны вершине v_{l-1}, тогда получим предфрактальный (*n, l*-1)-граф. Поиск p-медианы для предфрактального (*n, l*-1)-графа аналогичен. Получим (Узденов, 2002) p-медиану (*l*-1)-го ранга, т.е. p_{l-1}-медиану.

Продолжим процесс до *l*=1 и получим предфрактальныий (*n,* 1)-граф с p_1-медианой. Эта p_1-медиана лучим (Узденов, 2002) является p-медианой для всего фрактального графа.

Теорема 5. Алгоритм α выделяет p_l-медианы на предфрактальном (n, l)-графе $G_l = (V_l, E_l)$, $l = (\overline{1, L})$, с коэффициентом $k < \dfrac{a}{b}$ (Емеличев и др., 1990), оптимальный по $F_1(x)$ с оценками $F_2(x) \le \dfrac{n^{L-1} \cdot k^{L-1} \cdot b}{2}$, $F_3(x) \le p$. Причём трудоёмкость алгоритма α равна $\tau(\alpha) = O(N \cdot n^2)$, где $N = |V|$.

Доказательство. Алгоритм α потребует выполнения $O(n^2)$ операций на каждой затравке. Тогда $\tau(\alpha) = O(\dfrac{n^L - 1}{n-1} \cdot n^2) = O(N \cdot n^2)$. В силу коэффициента $k < \dfrac{a}{b}$ в процессе своей работы алгоритм α просматривает рёбра $e_{ij} \in E_l$ в порядке возрастания их ранга, причём не переходит к следующему рангу до тех пор, пока не будут просмотрены все рёбра текущего ранга. В силу этого правила исключается избыточное присутствие рёбер старшего ранга. Поэтому α выделяет на предфрактальном (n, l)-графе $G_l = (V_l, E_l)$, $l = (\overline{1, L})$, p_l-медиану, оптимальную по критерию $F_1(x)$. Так как в выделении p_l-медианы участвует $\dfrac{n^{L-1}}{2}$ рёбер, то суммарный минимальный вес рёбер, участвующих в p_l-медиане, не превосходит $\dfrac{n^{L-1} \cdot k^{L-1} \cdot b}{2}$. Естественно, верхней оценкой критерия $F_4(x)$ будет p.

Теорема доказана.

Литература

Берж К. Теория графов и ее применение. – М.: Изд. иностр. лит-ры, 1962
Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982
Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. - М.: Наука, 1990
Кочкаров А.М. Распознавание фрактальных графов. Нижний Архыз, 1998
Кочкаров А.М., Перепелица В.А. Метрические характеристики фрактального и предфрактального графа. Сб. РАН САО.-1999
Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978
Оре О. Теория графов. - М.: Наука, 1968
Перепелица В.А., Мамедов А.А. Исследование сложности и разрешимости векторных задач на графах. Учебное пособие. Черкесск, 1995
Узденов А.А. Математическая модель задач размещения на предфрактальных и фрактальных графах. Деп. в ВИНИТИ 26.04.02. №767-В2002
Узденов А.А., Кочкаров А.М. Задача о p-медиане на предфрактальных графах. Вторая международная конференция “Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики”. Тез. Докл. Нальчик – 2001, с. 163-164

Бесплатно

А.А. Узденов

ГАРАНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ P-МЕДИАН НА ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФАХ С ЗАТРАВКОЙ – ПОЛНЫМ n-ВЕРШИННЫМ ГРАФОМ, РЕБРОМ, n-ВЕРШИННОЙ ЗВЕЗДОЙ

Работа поступила в печать
11 октября 2004 г.

Заказ №160с Уч.изд.л.-1.2 Тираж 25
Специальная астрофизическая обсерватория РАН