

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИОЯРКОСТИ ПРИ НАБЛЮДЕНИЯХ С НОЖЕВОЙ ДИАГРАММОЙ

Б. С. Минченко

Описывается алгоритм восстановления, позволяющий синтезировать радиоизображения высокого качества. Приводятся примеры восстановленных изображений, дается оценка их качества.

A restoration algorithm allowing to synthesize radio images of high duality is described. The examples of the images restored are considered, their quality is evaluated.

Введение

Одной из актуальных задач радиоастрономии является изучение детальной пространственной структуры, что требует построения их двумерных радиоизображений. Стремление улучшить разрешающую способность радиотелескопов с тем, чтобы добиться высокого качества изображений, привело к созданию принципиально нового метода формирования изображения — апертурному синтезу.

Большое распространение получил так называемый суперсинтез Райла [1], использующий для синтеза U — V -плоскости вращение Земли. Другой способ синтеза реализован в радиотелескопе РАТАН-600, являющемся на сегодняшний день единственной действующей рефлекторной системой апертурного синтеза [2]. Это — азимутальный апертурный синтез.

В любой системе апертурного синтеза время, необходимое для полного синтеза пространственного спектра объекта, определяется синтезированным разрешением. Поскольку при достижении высокого разрешения время наблюдений может стать неприемлемо большим, возникает вопрос оптимизации синтеза. Возможны два выхода из создавшегося положения. Первый — усложнение антенной системы (например, увеличение числа и размера элементов при суперсинтезе Райла), однако это автоматически ведет к ее удорожанию. Второй выход заключается в том, что можно производить неполный синтез спектра объекта, т. е. оставлять «дыры» на U — V -плоскости. В этом случае приходится поступаться качеством изображения.

Задача синтеза может решаться с помощью радиотелескопа РАТАН-600 несколькими способами. Здесь мы рассмотрим один из них — последовательный азимутальный апертурный синтез при наблюдениях на низких углах места или с перископом. В этих случаях диаграмма имеет форму, близкую к ножевой.

Большинство внегалактических радиоисточников имеет угловые размеры, меньше вертикального размера ножевой диаграммы. Поэтому можно полагать, что при этих условиях такая диаграмма будет осуществлять стрип-интегрирование распределения радиояркости, т. е. при прохождении исследуемого источника с распределением радиояркости по нему $T_a(x, y)$ ножевой диаграммой, большая ось которой составляет угол θ , например, с осью x

системы координат x, y , жестко связанной с этим источником, будет регистрироваться величина [3]

$$T_s(S, \theta) = A(R) * T_L(R, \theta), \quad (1)$$

где символ $*$ означает операцию свертывания; $A(R)$ — профиль узкого сечения ножевой диаграммы;

$$T_L(R, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_a(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - R) dx dy, \quad (2)$$

т. е. результат линейного интегрирования $T_a(x, y)$ вдоль большой оси ножевой диаграммы L ; δ — дельта-функция Дирака; смысл R, θ ясен из рис. 1.

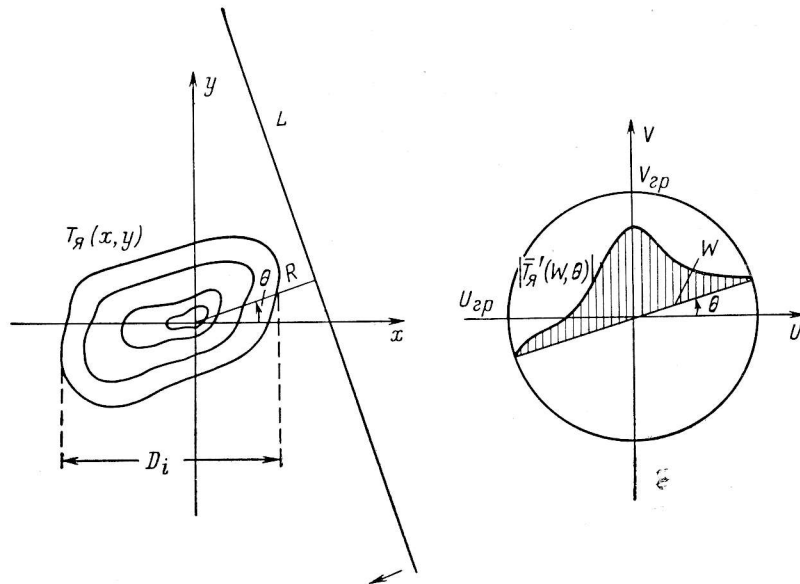


Рис. 1. Взаимосвязь явлений в плоскости объекта и плоскости пространственных частот.

Прохождение источника при позиционном угле θ дает на $U-V$ -плоскости одно сечение, ориентированное под углом θ к оси U . При наблюдениях в разных азимутах (т. е. при различных θ) на спектральной плоскости синтезируются соответствующие сечения. Следовательно, в этом режиме можно синтезировать радиоизображение участка неба диаметром порядка большего размера ножевой диаграммы с разрешением, определяемым малым размером этой диаграммы.

Методы восстановления при наблюдениях с ножевой диаграммой были описаны Брейсвеллом [3], а в [2] было указано, что из них наиболее предпочтителен метод, основные этапы которого перечисляются ниже.

1. Вычисляются фурье-преобразования всех наблюдательных данных.
2. Каждое сечение исправляется за сглаживающее действие радиотелескопа путем деления на спектральную функцию антенны.
3. Строится двумерный спектр $\bar{T}_a(U, V)$.
4. \bar{T}_a линейно интегрируется по ряду направлений ($\bar{T}_a \rightarrow \bar{T}_L$).
5. Вычисляются фурье-преобразования от всех \bar{T}_L .
6. Строится двумерное изображение $T_a(x, y)$.

Однако при программной реализации этого метода возникают серьезные трудности. Основная из них заключается в том, что спектр оказывается измеренным в точках, расположенных на некотором семействе линий, в то время как для последующего линейного интегрирования ($\bar{T}_a \rightarrow \bar{T}_L$) необ-

ходимо знать спектр в любой точке внутри области пропускания. Построив из синтезированных компонент двумерный спектр, мы получим матрицу значений $\bar{T}_a(U, V)$ объемом, как правило, превышающим объем оперативной памяти ЭВМ (ОЗУ). Следовательно, эту матрицу придется размещать в накопительной памяти ЭВМ (ДЗУ), а в ОЗУ может находиться лишь некоторая часть от всей \bar{T}_a . Очевидно, что в этом случае выполнение операции линейного интегрирования практически неосуществимо при любом способе размещения двумерного массива $\bar{T}_a(U, V)$ в ДЗУ.

Ниже описывается алгоритм восстановления, позволяющий работать с матрицами больших размеров, не уместяющимися в ОЗУ, что дает возможность строить изображения высокого качества. Укажем его отличия от метода, рассмотренного выше. Основное из них заключается в том, что переход от спектра пространственных частот $\bar{T}_a(U, V)$ к искомому распределению радиояркости $T_a(x, y)$ осуществляется с помощью алгоритма «быстрое преобразование Фурье» (БПФ) в его двумерной модификации. Преимущества БПФ по сравнению с прямым вычислением преобразования Фурье общеизвестны [4]. Однако использование этого алгоритма выдвигает ряд дополнительных требований. Они будут изложены далее, а здесь отметим лишь, что значения спектра должны быть заданы на прямоугольной или треугольной решетке выборок. Следовательно, для построения $\bar{T}_a(U, V)$ в узлах подобных решеток из синтезированных компонент необходима интерполяционная процедура. Другие особенности предлагаемого алгоритма менее существенны и будут рассмотрены в следующем параграфе.

1. Описание алгоритма

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 2. Исходными данными для синтеза двумерного распределения радиояркости по объекту являются регистрируемые на выходе радиотелескопа одномерные временные сигналы. Выходной сигнал радиотелескопа можно представить в виде

$$T_{sn}(R, \theta_i) = T_s(R, \theta_i) + T_n(R, \theta_i), \quad (3)$$

где $T_s(R, \theta_i) = A(R) * T_L(R, \theta_i)$ — собственно сигнал; $T_n(R, \theta_i)$ — аддитивный шум; θ_i — позиционный угол i -го наблюдения.

Процесс восстановления можно разделить на ряд этапов. Рассмотрим их последовательно.

1. Переход от записи $T_{sn}(R, \theta_i)$ к ее спектру пространственных частот. Необходимо заметить, что, поскольку координаты x, y жестко связаны с наблюдаемым источником, каждая запись должна иметь строго определенное положение относительно своей оси ординат. Любой сдвиг записи по оси абсцисс вызовет умножение спектра на соответствующую экспоненту (по теореме сдвига из фурье-анализа). Переходя к спектру, имеем для каждого θ_i

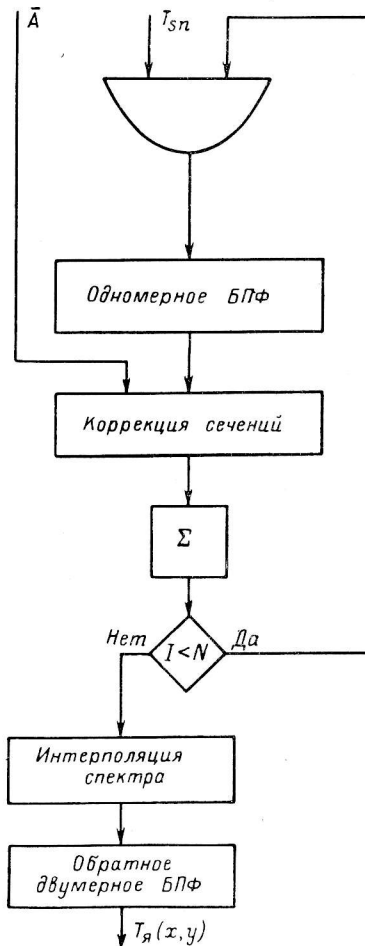


Рис. 2. Блок-схема алгоритма восстановления.

N — число азимутов.

$$\bar{T}_{sn}(W) = \int_{-\infty}^{\infty} T_{sn}(R) e^{-i2\pi WR} dR, \quad (4)$$

$$U = W \cos \theta_i, \quad (5)$$

$$V = W \sin \theta_i, \quad (6)$$

\bar{T}_{sn} в общем случае является комплексной функцией с четной вещественной и нечетной мнимой частью (ввиду действительности T_{sn}). Вычисление спектра проводится по методу БПФ. Интеграл (4) при этом аппроксимируется суммой

$$\bar{T}_{sn}(W) = \sum_{k=0}^{N-1} T_{sn}(R_k) e^{-i2\pi k W/N}, \quad (7)$$

где N — число выборок последовательности.

2. Исправление за сглаживание диаграммой радиотелескопа. Выражение (7) представляет собой взвешенное спектральной характеристикой антенны $\bar{A}(W)$ и искаженное шумами сечение двумерного пространственного спектра объекта, ориентированное под углом θ_i к оси U :

$$\bar{T}_{sn}(W) = \bar{T}_{sn}(W) \bar{A}(W), \quad (8)$$

где $\bar{T}_{sn}(W)$ — сечение $\bar{T}_s(U, V)$ под углом θ_i . Индекс sn означает наличие шума, приводящее к искажению спектра

$$\bar{A}(W) = \int_{-\infty}^{\infty} A(R) e^{-i2\pi WR} dR. \quad (9)$$

Из (8) нужно определить величину $\bar{T}_{sn}(W)$.

Коррекция сечения путем простого деления на $\bar{A}(W)$ неудовлетворительна, поскольку $\bar{T}_{sn}(W)$ известно с некоторой случайной ошибкой, обусловленной наличием помех. Спектральная плотность этих помех может быть весьма значительной по сравнению с энергетическим спектром $|\bar{A}\bar{T}_{sn}|^2$ в некоторых участках полосы пропускания. $|\bar{A}(W)|$ спадает вблизи граничной частоты, и в результате деления на \bar{A} в районе высоких гармоник возникают большие ложные выбросы. Применением разного рода корректирующих множителей можно существенно ослабить этот эффект. Автором выбран множитель вида [5]

$$K(W) = \frac{\Phi_{sn}(W) - \Phi_n(W)}{\Phi_{sn}(W)}, \quad (10)$$

где

$$\Phi_{sn}(W) = |\bar{T}_{sn}^2(W)| \quad (11)$$

— спектральная плотность мощности сигнала;

$$\sigma^2 = 2 \int_0^{W_{гр}} \Phi_n(W) dW, \quad (12)$$

— спектральная плотность мощности шума (в пределах полосы пропускания шум предполагается «белым», что близко к реальности); σ^2 — дисперсия шума; $W_{гр} = D_r/\lambda$ — граничная частота; λ — длина волны; D_r — горизонтальный размер апертуры радиотелескопа. В результате коррекции получается некоторое приближенное сечение

$$\bar{T}'_s(W) = \frac{\bar{T}_{sn}(W)}{\bar{A}(W)} K(W). \quad (13)$$

3. Интерполяция спектра по его выборкам. После того как все данные наблюдений будут сведены к сечениям (13) на U — V -плоскости, необходимо построить $\bar{T}'_s(U, V)$. С этой целью проводится интерполяция спектра по его

выборкам для вычисления значений в узлах прямоугольной решетки (прямоугольная решетка выбрана с учетом п. 4). Используется интерполяционная формула Лагранжа, допускающая неравномерное распределение узлов интерполяции (а это может иметь место, так как азимуты наблюдений могут выбираться произвольно).

Для двух переменных она имеет вид

$$\begin{aligned} T(W, \theta) = & \sum_{l=1}^{k+1} \frac{(W - W_1) \dots (W - W_{l-1})(W - W_{l+1}) \dots (W - W_{k+1})}{(W_l - W_1) \dots (W_l - W_{l-1})(W_l - W_{l+1}) \dots (W_l - W_{k+1})} \times \\ & \times \sum_{m=1}^{n+1} \frac{(\theta - \theta_1) \dots (\theta - \theta_{m-1})(\theta - \theta_{m+1}) \dots (\theta - \theta_{n+1})}{(\theta_m - \theta_1) \dots (\theta_m - \theta_{m-1})(\theta_m - \theta_{m+1}) \dots (\theta_m - \theta_{n+1})} T(W_m, \theta_l), \end{aligned} \quad (14)$$

W и θ берутся такими, чтобы $\bar{T}_a(W, \theta)$ образовало прямоугольную решетку с постоянным шагом в U -направлении и постоянным шагом в V -направлении. Размер шага не должен превышать интервала, определяемого теоремой отсчетов (т. е. $1/D_i$).

Интерполяция проводится отдельно для вещественной и мнимой частей спектра. Так как функция распределения радиояркости $T_a(x, y)$ вещественна, то

$$\bar{T}_a(U, V) = \bar{T}_a^*(-U, -V), \quad (15)$$

где * означает комплексную сопряженность. Следовательно, достаточно провести интерполяцию в двух квадрантах $U-V$ -плоскости. Интерполяция проводится в таком порядке, чтобы прямоугольная матрица $\bar{T}_a(U, V)$ вычислялась построчно. После вычисления очередной строки последняя записывается в ДЗУ, и на ее месте в ОЗУ вычисляется следующая строка. В итоге матрица $\bar{T}_a(U, V)$ оказывается записанной в ДЗУ последовательно строка за строкой.

4. Переход от $\bar{T}_a(U, V)$ к искомому распределению радиояркости

$$T_a(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{T}_a(U, V) e^{i2\pi(Ux+Vy)} dU dV. \quad (16)$$

В ЭВМ вычисляется следующая двойная сумма:

$$T_a(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \bar{T}_a(j, k) e^{i2\pi(xj/N+yk/M)}. \quad (17)$$

Это двумерное преобразование можно разбить на два одномерных:

$$T_a(x, y) = \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \sum_{k=0}^{M-1} \bar{T}_a(j, k) e^{i2\pi yk/M} \right\} e^{i2\pi xj/N}, \quad (18)$$

(здесь $\bar{T}_a(j, k)$ понимается как $\bar{T}_a(U_j, V_k)$). Подобная разделимость очень удобна для файлов изображения, структура которых обеспечивает последовательно-строчный доступ. Из (18) видно, что для вычисления двумерного преобразования Фурье необходимо вычислить одномерное преобразование Фурье для каждой строки, а затем для каждого столбца матрицы \bar{T}_a . Реализовать эту процедуру можно следующим образом: каждая строка матрицы считывается в ОЗУ, подвергается БПФ и затем возвращается на свое место в ДЗУ. После этого матрица транспонируется, и повторяется предыдущая процедура с новыми строками.

Основная трудность заключается в транспонировании матрицы, если последняя не умещается в ОЗУ. Ее можно преодолеть следующим образом: разбить матрицу на части, каждая из которых умещается в ОЗУ, произвести транспонирование их элементов, а затем транспонирование самих этих частей. При этом способе остаются довольно жесткие требования к объему

ОЗУ, буферной памяти, которые могут оказаться невыполнимыми, если матрица достаточно велика.

Недавно появился новый метод транспонирования матриц, требующий в каждый момент произвольного доступа лишь к двум строкам матрицы изображения [6]. Тем самым снимаются все требования, предъявляемые к ОЗУ, и отпадает необходимость в буферной памяти. Этот метод применим лишь к квадратным матрицам со стороной 2^m , но такое ограничение для нас несущественно, так как наша матрица всегда может быть дополнена до квадратной добавлением нулевых членов.

Автор применил этот алгоритм для вычисления (18) по методу БПФ, которое сводится к определенному числу этапов m (2^m — размер стороны матрицы).

Первый этап включает в себя следующее.

В ОЗУ вызываются две определенные строки, каждая из которых подвергается БПФ, затем в них взаимозаменяются определенные элементы, после чего преобразованные строки возвращаются на свои места в ДЗУ.

Предыдущие операции повторяются с двумя другими строками. После обработки таким способом всех строк первый этап считается законченным.

Все последующие этапы отличаются от первого тем, что не производится БПФ. Ясно, что на каждом этапе — свои правила выбора вызываемых строк и чередования элементов в них. При выполнении заключительного m -го этапа после перестановки элементов в строках, перед возвращением строк обратно в ДЗУ, нужно вычислить БПФ каждой из строк. По окончании m -го этапа в ДЗУ будет записана матрица значений искомого $T_a(x, y)$ (по столбцам).

2. Моделирование алгоритма восстановления на ЭВМ

Описанный алгоритм был реализован на двух версиях алгоритмического языка ФОРТРАН (ФОРТРАН-2 и ФОРТРАН-4) и испытан на ЭВМ М-222 и ЕС-1020. Структурно он представляет собой набор достаточно универсальных подпрограмм, которые в процессе вычислений вызываются по мере надобности компанующей программой. Алгоритм опробовался на ряде примеров. Было выбрано несколько типичных моделей источников, и с помощью ЭВМ промоделированы наблюдения, т. е. получены последовательности (1) для различных позиционных углов θ . Эти углы, естественно, соответствовали тем, которые практически имеют место на РАТАН-600. Свертка вычислялась с помощью БПФ. Профиль узкого сечения ножевой диаграммы был задан в виде

$$\{[\sin(\pi D_T R / \lambda)] / (\pi D_T R / \lambda)\}^2. \quad (19)$$

Затем полученные таким способом «наблюдения» зашумливались с помощью подпрограммы, генерирующей случайные нормальные числа с заданными средним и дисперсией.

Восстановление начинается с ввода исходных данных, т. е. последовательностей T_{sp} и соответствующих им θ . Применение БПФ для вычисления спектра входной последовательности налагает на последнюю ряд специфических требований. Приведем основные из них.

Отсчеты T_{sp} должны быть взяты равномерно. Существуют алгоритмы БПФ для любого количества отсчетов входной последовательности, но наиболее быстродействующими и компактными являются алгоритмы для числа отсчетов, равного степени двух. Автором применен один из таких алгоритмов. Число отсчетов всегда можно дополнить до степени двух набором нулевых значений.

При использовании БПФ к некоторой последовательности она сама и вычисляемый спектр должны рассматриваться как периодические функции. Период спектра равен $1/\Delta R$ (ΔR — расстояние между соседними выборками входной последовательности. Интервал между соседними отсчетами спектра равен $1/R_T$ (R_T — период входной последовательности).

В ЭВМ вводится некоторый участок периодической последовательности, т. е. она умножается на прямоугольную выделяющую функцию, а это в спектральной области приводит к свертке вычисляемого спектра с функцией вида $\sin x/x$. Уменьшить такое искажение можно, взяв спадающую к краям выделяющую функцию. С этой целью к отсчетам T_{sn} добавлен набор нулей.

Для экономии памяти ЭВМ применен так называемый алгоритм БПФ с замещением, в котором значения спектра располагаются в тех же ячейках памяти, где размещались исходные отсчеты T_{sn} .

При интерполяции спектра по формуле Лагранжа для вычислений использовались не все узлы интерполяции (т. е. не все синтезированные точки на $U-V$ -плоскости), а лишь узлы, окружающие точку, в которой ищется спектр.

3. Результаты моделирования

Одной из выбранных типичных моделей была модель двойного источника. Его восстановление производилось при различных количествах азимутов. Максимальный размер этого источника был выбран таким, чтобы не соблюдалось условие [2]

$$N \geq \pi D_i / 4 \phi_a, \quad (20)$$

где $\phi_a = \lambda/D_r$, D_i — максимальный размер источника, N — число азимутов. Таким образом, процент «дыр» на $U-V$ -плоскости был больше, чем допускается теоремой отсчетов для точного восстановления. Кроме числа азимутов, в различных вариантах изменялись соотношение сигнал/шум, число членов разложения в формуле Лагранжа (14), ширина выделяющей функции при вычислении по формуле (7).

Качество восстановленных изображений оценивалось критериями, широко используемыми в оптике: степенью корреляции

$$Q = \overline{T_{\text{ист}}(x, y) T_{\text{я}}(x, y)} / \overline{T_{\text{ист}}^2(x, y)}, \quad (21)$$

дефектом верности

$$F = 1 - \overline{[T_{\text{ист}}(x, y) - T_{\text{я}}(x, y)]^2} / \overline{T_{\text{ист}}^2(x, y)}, \quad (22)$$

где $T_{\text{ист}}(x, y)$ — истинное распределение, черта сверху означает усреднение по ансамблю.

Моделирование показало, что качество изображения в основном определяется степенью заполнения $U-V$ -плоскости и в гораздо меньшей мере — величиной дисперсии шума. Это можно проиллюстрировать табл. 1 (Δ — стандартное отклонение шума в % от максимальной интенсивности) и 2.

ТАБЛИЦА 1

Зависимость Q и F от уровня шума при неизменном числе азимутов

Число азимутов	Δ	Q	F
6	0	0.701	0.776
6	3	0.683	0.768
6	5	0.694	0.767

ТАБЛИЦА 2

Зависимость Q и F от числа азимутов (в отсутствие шумов)

Число азимутов	Q	F
6	0.701	0.776
4	0.623	0.703
3	0.225	0.169

Выяснилось, что влияние прочих факторов (числа членов разложения в (14) при интерполяции спектра, ширины выделяющей функции) незначительно по сравнению с влиянием степени заполнения $U-V$ -плоскости.

Без заметного ухудшения качества изображения можно брать в (14) $k+1=4$ и $n+1=4$. При этом существенно сокращается время счета по фор-

муле (14). Увеличение ширины выделяющей функции резко увеличивает время счета, поэтому следует избегать большого расширения входных последовательностей $T_{\text{вн}}$. Достаточно хорошие результаты получаются, если длина

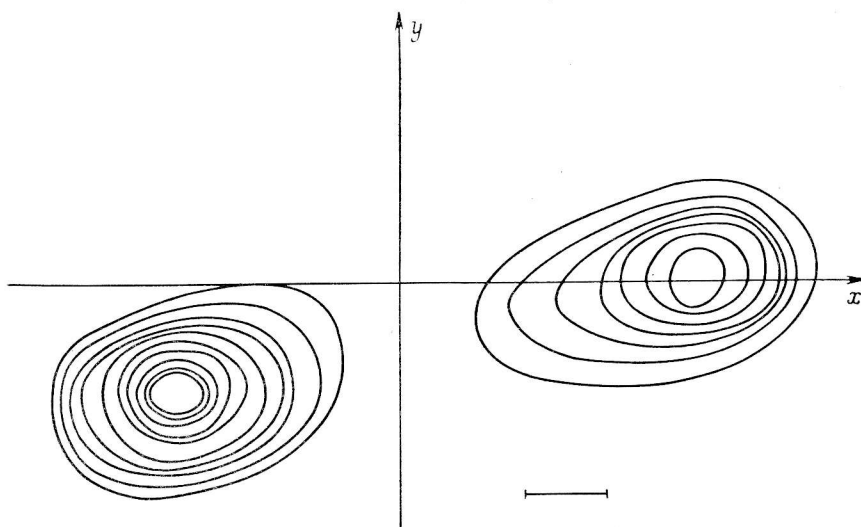


Рис. 3. Модель двойного источника.

Длина отрезка (справа внизу) равна ширине узкого сечения ножевой диаграммы.

исходной последовательности (т. е. реальной записи) составляет примерно половину длины расширенной последовательности.

На рис. 3 изображена исходная модель двойного источника. Ее размеры выбраны такими, что в соответствии с (20) для точного восстановления необ-

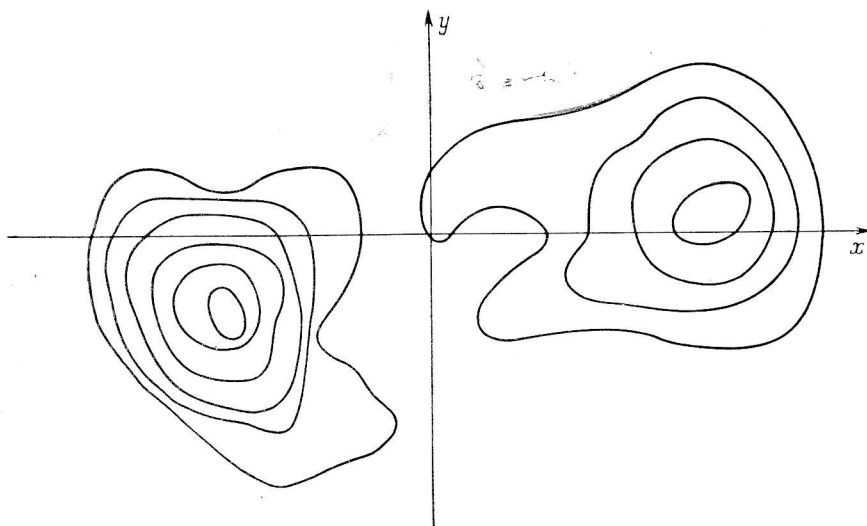


Рис. 4. Восстановленное изображение при использовании шести азимутов.

ходимо $N=12$, в то время как используется $N \leq 6$. Рис. 4 и 5 показывают, что даже при столь плохом заполнении $U-V$ -плоскости (6 и 4 сечения соответственно, $\sigma=5\%$ в обоих случаях) прослеживается структура источника. При $N=3$ (см. последнюю строку табл. 2) изображение оказывается

«разваленным», т. е. можно сделать вывод, что для получения умеренно хорошего изображения в данном случае надо брать $N > 3$.

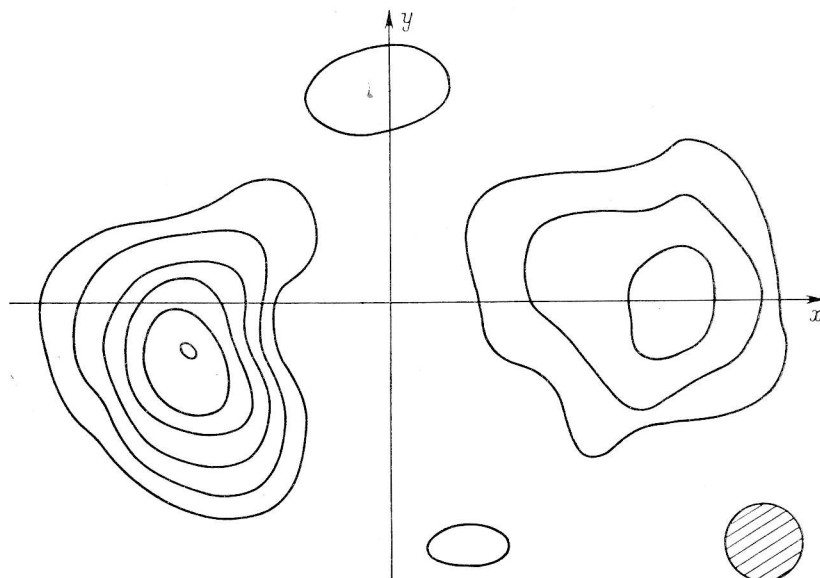


Рис. 5. Восстановленное изображение при использовании четырех азимутов.

Заштрихованная область соответствует по форме и размерам главному лепестку синтезированной диаграммы.

При моделировании восстановления источников малого углового размера (порядка ширины узкого сечения ножевой диаграммы) подтвердилось, как это было указано в [2], что в этом случае оказывается достаточным двух-трех азимутов.

Выводы

В случае, когда целью наблюдений является изучение тонкой структуры радиоисточников, необходимо, чтобы количество прохождений удовлетворяло условию (20). При менее строгих требованиях к качеству (например, при общей оценке структуры источника) число азимутов может быть уменьшено, но не ниже некоторого предела во избежание «замытия» изображения источника и появления ложных деталей. На основании моделирования можно заключить, что при умеренном отношении сигнал/шум этот предел близок к $N/2$ (N определяется из (20)).

В заключение автор выражает благодарность Ю. Н. Парийскому и П. А. Фридману за полезное обсуждение работы.

Литература

1. Есепкина Н. А., Корольков Д. В., Парийский Ю. Н. Радиотелескопы и радиометры. М., «Наука», 1973. 415 с.
2. Парийский Ю. Н., Шиврис О. Н. Методы радиоастрономического использования РАТАН-600. — Изв. Глав. астрон. obs. в Пулкове, 1972, № 188, с. 13—39.
3. Bracewell R. N. Strip integration in radioastronomy. — Austr. J. Phys., 1956, 9, N 2, p. 198—217.
4. Cooley J. W., Tukey J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. — Math. Comput., 1965, 19, p. 297—301.
5. Фридман П. А. Некоторые вопросы построения радиоастрономического изображения. Автореф. канд. дис., 1973.
6. Klundt J. O. A fast computer method for matrix transposing. — IEEE Trans. Comput. (Corresp.), 1972, 21, p. 801—803.

Май 1975 г.