АСТРОФИЗИЧЕСКИЙ БЮЛЛЕТЕНЬ, 2024, том 79, № 1, с. 153–161

УДК 524-32:52-17

СЛУЧАИ ДАЛЬНЕЙШЕЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЛОКАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ. I

Ф. Т. Шамшиев[1*]

[1] *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, 100174 Узбекистан*

Поступила в редакцию 3 августа 2023 года; после доработки 16 сентября 2023 года; принята к публикации 18 сентября 2023 года

Локальный интеграл, позволяющий сразу определять поле скоростей для некоторых конкретных начальных условий, был введен Антоновым и Шамшиевым в 1992 г. В этой работе мы рассматриваем случаи, когда интегрируемость траектории можно продвинуть дальше. Тогда получается аналитическая связь между x, y, z, t данной траектории. Классифицируются возможные случаи, и анализируется один из них.

Ключевые слова: *методы: численные — звездная динамика: уравнение движения*

1. ВВЕДЕНИЕ

Практическую пользу в смысле понимания характера движения частиц в заданном поле могут принести и такие интегралы движения, которые существуют не при всех начальных условиях, а только на их многообразии меньшей размерности. Эти интегралы В. А. Антоновым названы «локальными» (Antonov, 1981). Полученный автором локальный интеграл имеет вторую степень по скоростям или, в исключительных случаях, первую. В отличие от интеграла Линден-Белла (Lynden-Bell, 1962; 2016), здесь речь идет, по существу, о «частном» интеграле известного в теории вращения твердого тела вокруг закрепленной точки (Golubev, 1953). Локальный интеграл В. А. Антонова, построенный в аналитическом виде, в отличие от настоящего интеграла, вообще говоря, еще не позволяет найти сами траектории, а только инвариантные множества в фазовом пространстве. В работах Antonov and Shamshiev (1993), Shamshiev (1995; 2021) был исследован линейный локальный интеграл в стационарном гравитационном поле во вращающейся с постоянной угловой скоростью системе координат. Antonov and Shamshiev (1994) рассматривали некоторый специальный случай интегрируемости плоского движения в поле тяготения вращающейся системы при наличии линейного интеграла.

В этой работе анализируются случаи интегрируемости траектории в пространственной задаче с двузначным полем скоростей. Согласно нашему предыдущему исследованию (Antonov and Shamshiev, 1992), потенциал $U(x, y, z)$ при наличии локального интеграла, определяющего скорость в данной точке с точностью до знака, должен удовлетворять соотношениям:

$$U = \frac{1}{2}\left[(\nabla F)^2 + \rho(L)\right], \quad (1)$$

где ρ — пока произвольная функция, а вспомогательная функция $L(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$(\nabla L)^2 = 1, \quad (2)$$

в то время как функция $F(x, y, z)$ подчинена ограничению

$$\nabla L \times \nabla F = 0. \quad (3)$$

Это не самая общая, но достаточно простая схема построения локального интеграла с указанными топологическими свойствами поля скоростей. Как объяснялось (см. Antonov and Shamshiev, 1992), с учетом перечисленных условий при любой постоянной энергии h полностью определяются допустимые значения вектора скорости, если начальные условия соответствуют некоторому определенному инвариантному многообразию в фазовом пространстве (при произвольном интеграле энергии). Это еще не дает возможности получить в явном виде зависимость координат от времени, поскольку остается необходимость интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt, \quad (4)$$

[*] E-mail: shamshiyev_f@nuu.uz

но порядок этой системы может быть понижен, если возможно «расширение» упомянутого многообразия с нулевой хотя бы до бесконечно малой ширины.

При таком «расширении» мы не меняем потенциала, но вспомогательные функции могут получить свои бесконечно малые приращения. Расчеты ведем с точностью первого порядка по некоторому общему малому параметру, входящему в эти приращения, линеаризация (1), (2) и (3) приводит к

$$2\nabla F \times \nabla \delta F + \rho'(L)\delta L + \delta\rho(L) = 0, \qquad (5)$$

$$\nabla L \times \nabla \delta L = 0, \qquad (6)$$

$$\nabla \delta F \times \nabla L + \nabla F \times \nabla \delta L = 0. \qquad (7)$$

Решение этой довольно сложной системы и составляет в основном предмет предлагаемой серии статей. В данной первой публикации мы еще не решаем задачу до конца, а:

1) конкретизируем функцию $\delta\rho(L)$, оказывающуюся элементарной довольно узкого класса;
2) даем классификацию качественно различных вариантов;
3) сводим к возможно более простому виду основные формулы одного из вариантов и, в частности, фиксируем многообразие, на котором расположена траектория.

2. РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ δF И ДРУГИХ ФУНКЦИЙ ВБЛИЗИ ВЫБРАННОЙ ОСИ

Прежде всего обратим внимание на векторную функцию $\vec{R} = \nabla \delta F$. Поскольку уравнения (5) и (7) задают в каждой точке проекции этого вектора на два направления, фиксированные ортогональными друг другу векторами ∇F и ∇L, $\vec{R}$ сразу формально определяется по правилам векторной алгебры с учетом (2) как

$$\begin{aligned}\vec{R} = &- (\nabla F \times \nabla \delta L) \times \nabla L \\ &- \frac{\rho'(L)\delta L + \delta\rho(L)}{2(\nabla F)^2}\nabla F - \lambda(\nabla L \times \nabla F).\end{aligned} \qquad (8)$$

Причем в (8) остается еще произвол, связанный с выбором скалярной функции $\lambda(x, y, z)$. Возможный особый случай постоянства F выпадает из нижеследующего рассмотрения и должен рассматриваться отдельно.

Кроме этого особого случая, можно опираться на векторное соотношение (8). Поскольку слева стоит градиент от δF, ротор правой части должен обращаться тождественно в нуль. Это дает три соотношения, которые формально можно записать как

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \delta F}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \delta F}{\partial z}\right) = 0, \\ \frac{\partial R_y}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial y} = 0,\end{gathered} \qquad (9)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \delta F}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \delta F}{\partial x}\right) = 0, \\ \frac{\partial R_z}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial z} = 0,\end{gathered} \qquad (10)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \delta F}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \delta F}{\partial y}\right) = 0, \\ \frac{\partial R_x}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial x} = 0.\end{gathered} \qquad (11)$$

В выражениях (9)–(11) мы имеем дело с тремя уравнениями (правда, зависимыми между собой) для неизвестных функций λ и $\delta\rho$, если функции нулевого приближения, а также довольно легко определяемую в общей форме δL предполагать заданными.

Сразу такая задача трудновыполнима, но мы можем решать ее сначала как бы локально, по отдельности на определенных линиях, представляющих собой «траектории» вектора ∇L. В соответствии со свойствами уравнения (2), достаточно хорошо изученными Landau and Lifshitz (1973), это прямые. Действительно, общее решение записывается в виде

$$L = -n_x x - n_y y - n_z z - \chi, \qquad (12)$$

где χ задается как произвольная функция на вспомогательной сфере

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1, \qquad (13)$$

точка которой определяется по заданной в истинном пространстве точке (x, y, z) соотношениями

$$\begin{gathered}y - \frac{n_y}{n_x}x = -\frac{\partial \chi}{\partial n_y}, \\ z - \frac{n_z}{n_x}x = -\frac{\partial \chi}{\partial n_z},\end{gathered} \qquad (14)$$

если представлять себе n_y и n_z независимыми переменными, через которые выражено n_x. При этом автоматически получается

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -n_x, \frac{\partial L}{\partial y} = -n_y, \frac{\partial L}{\partial z} = -n_z \qquad (15)$$

и каждый определенный набор значений n_y, n_z дает, согласно (14), прямую, параллельную в каждой точке ∇L. Далее выбираем для более подробного исследования системы (9)–(11) одну из таких прямых. Надлежащим поворотом пространства, который, как легко проверяется, эквивалентен повороту вспомогательной сферы (13), всегда можно выбранные значения n_y и n_z совместить с 0, а параллельный перенос в пространстве позволяет отождествить прямую (14) просто с осью x; окрестность этой оси будет соответствовать малым ненулевым значениям n_y и n_z. Исключение может представить только тот случай, когда используется не двумерная площадь на сфере (13), а только одномерная кривая, т.е. когда n_y и n_z функционально зависят друг от друга. Этот особый случай мы опять выделяем для специального рассмотрения. В общем же случае мы пользуемся разложением

$$\chi = \frac{1}{2}\left(An_y^2 + Bn_z^2\right) + an_y^3 + bn_y^2 n_z + cn_y n_z^2 + dn_z^3 + \cdots \tag{16}$$

с постоянными A, B, a, b, c, d. Члены с $n_y n_z$ предполагаем устраненными посредством надлежащего поворота вокруг оси x, а члены первой степени обращаются в нуль в силу указанного выбора системы координат, достаточно подставить $x = y = z = 0$ в (12), а аддитивная константа в χ не играла бы никакой роли. Выбор знака для n_x, в принципе, произволен, мы выбираем $n_x = 1$ и, из (12), $L = -x$ на оси x. Аналогичное локальное разложение нам понадобится для F. В силу (3), значение F зависит только от n_y, n_z и не меняется вдоль оси x. Опять нет смысла начинать разложение $F = \psi(n_y, n_z)$ с константы, но члены первой степени, вообще говоря, отличны от нуля

$$\psi(n_y, n_z) = \varphi_1 n_y + \varphi_2 n_z + \frac{1}{2}\left(\gamma_1 n_y^2 + 2\gamma_2 n_y n_z + \gamma_3 n_z^2\right) + \cdots \tag{17}$$

Ввиду (6), тем же свойствам зависимости, только от точки вспомогательной сферы, обладает и δL, причем снова от добавления в δL константы ничего бы не изменилось (член с ней в (5) можно было бы включать в состав $\delta\rho$). Итак,

$$\delta L \equiv \delta\chi(n_y, n_z) = \alpha n_y + \beta n_z + \frac{1}{2}\left(A_1 n_y^2 + 2Kn_y n_z + B_1 n_z^2\right) + \cdots \tag{18}$$

Напротив, λ и $\delta\rho$ на оси x не постоянны. В системе (9)–(11) для их определения мы пока используем уравнения (10) и (11), причем R_y и R_z нам понадобятся только в нулевом порядке по y и z или, что эквивалентно, по n_y и n_z, а R_x — в первом порядке.

В нулевом порядке y- и z-компоненты вектора ∇L (15) отсутствуют, а x-компонента обращается в -1. Для приближенного представления ∇F необходимо в первом приближении найти связь между y, z с n_y, n_z. Эта связь видна из (14) и (16), а именно:

$$y - n_y x \approx -An_y, z - n_z x \approx -Bn_z б \tag{19}$$

$$n_y = \frac{y}{x-A} + \cdots, n_z = \frac{z}{x-B} + \cdots б \tag{20}$$

$$F = \frac{\varphi_1 y}{x-A} + \frac{\varphi_2 z}{x-B} + \cdots \tag{21}$$

(поправки имеют порядок y^2, z^2). Кроме того, (18) дает $\delta L = 0$ на оси x и в целом из (8) следует

$$R_y = -\frac{\frac{\varphi_1}{x-A}\delta\rho}{2\left[\left(\frac{\varphi_1}{x-A}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_2}{x-B}\right)^2\right]} - \frac{\lambda\varphi_2}{x-B}, \tag{22}$$

$$R_z = -\frac{\frac{\varphi_2}{x-B}\delta\rho}{2\left[\left(\frac{\varphi_1}{x-A}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_2}{x-B}\right)^2\right]} - \frac{\lambda\varphi_1}{x-A}. \tag{23}$$

Для вычисления R_x понадобятся более точные, чем (19), выражения n_y, n_z. Из (14) имеем

$$y - n_y x \approx -An_y - 3an_y^2 - 2bn_y n_z - cn_z^2 + O(\rho^3), \tag{24}$$

$$z - n_z x \approx -Bn_y - bn_y^2 - 2cn_y n_z - 3dn_z^2 + O(\rho^3), \tag{25}$$

и подстановка в квадратичные члены по n_y, n_z первого приближения (19) дает

$$n_y = \frac{y}{x-A} + \frac{1}{x-A}\left(\frac{3ay^2}{(x-A)^2} + \frac{2byz}{(x-A)(x-B)} + \frac{cz^2}{(x-B)^2}\right), \tag{26}$$

$$n_z = \frac{z}{x-B} + \frac{1}{x-B}\left(\frac{by^2}{(x-A)^2} + \frac{2cyz}{(x-A)(x-B)} + \frac{3dz^2}{(x-B)^2}\right). \tag{27}$$

С увеличенной точностью находим F и δL:

$$F = \frac{\varphi_1 y}{x-A} + \frac{\varphi_2 z}{x-B} + \frac{\varphi_1}{x-A}\left(\frac{3ay^2}{(x-A)^2} + \frac{2byz}{(x-A)(x-B)} + \frac{cz^2}{(x-B)^2}\right)$$
$$+ \frac{\varphi_2}{x-B}\left(\frac{by^2}{(x-A)^2} + \frac{2cyz}{(x-A)(x-B)} + \frac{3dz^2}{(x-B)^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_1 y^2}{(x-A)^2} + \frac{2\gamma_2 yz}{(x-A)(x-B)} + \frac{\gamma_3 z^2}{(x-B)^2}\right) + O(\rho^3),$$

$$\delta L = \frac{\alpha y}{x-A} + \frac{\beta z}{x-B} + \frac{\alpha}{x-A}\left(\frac{3ay^3}{(x-A)^2} + \frac{2byz}{(x-A)(x-B)} + \frac{cz^2}{(x-B)^2}\right)$$
$$+ \frac{\beta}{x-B}\left(\frac{by^2}{(x-A)^2} + \frac{2cyz}{(x-A)(x-B)} + \frac{3dz^2}{(x-B)^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{A_1 y^2}{(x-A)^2} + \frac{2Kyz}{(x-A)(X-B)} + \frac{B_1 z^2}{(x-B)^2}\right) + O(\rho^3),$$

$$\nabla F \times \nabla \delta L = \frac{\varphi_1 \alpha}{(x-A)^2} + \frac{2\alpha\varphi_1}{(x-A)^2}\left(\frac{6\alpha y}{(x-A)^2} + \frac{2bz}{(x-A)(x-B)}\right) + \frac{\alpha\varphi_2 + \beta\varphi_1}{(x-A)(x-B)}\left(\frac{2by}{(x-A)^2} + \frac{2cz}{(x-A)(x-B)}\right)$$
$$+ \frac{\varphi_1}{x-A}\left(\frac{A_1 y}{(x-A)^2} + \frac{Kz}{(x-A)(x-B)}\right) + \frac{\alpha}{x-A}\left(\frac{\gamma_1 y}{(x-A)^2} + \frac{\gamma_2 z}{(x-A)(x-B)}\right)$$
$$+ \frac{2\beta\varphi_2}{(x-B)^2}\left(\frac{2cy}{(x-A)(x-B)} + \frac{6dz}{(x-B)^2}\right) + \frac{\varphi_2}{x-B}\left(\frac{B_1 z}{(x-B)^2} + \frac{Ky}{(x-A)(x-B)}\right)$$
$$+ \frac{\beta}{x-B}\left(\frac{\gamma_2 y}{(x-A)(x-B)} + \frac{\gamma_3 z}{(x-B)^2}\right) + \frac{\beta\varphi_2}{(x-B)^2} + O(\rho^2). \tag{28}$$

Во втором члене (8) в $\dfrac{\delta F}{\delta x}$ уже имеет первый порядок по ρ, поэтому остающаяся дробь учитывается только в нулевом порядке. В частности, δL учитывать не надо, а

$$(\nabla F)^2 \approx \frac{\varphi_1^2}{(x-A)^2} + \frac{\varphi_2^2}{(x-B)^2}. \tag{29}$$

Наконец,

$$\frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y} = n_z \frac{\partial F}{\partial y} - n_y \frac{\partial F}{\partial z} \approx \frac{\varphi_1 z - \varphi_2 y}{(x-A)(x-B)}, \tag{30}$$

и вместе

$$R_x = \frac{\alpha\varphi_1}{(x-A)^2} + \frac{12a\alpha\varphi_1 y}{(x-A)^4} + \frac{4\alpha\varphi_1 bz}{(x-A)^3(x-B)} + \frac{A_1\varphi_1 y}{(x-A)^3} + \frac{\varphi_1 Kz}{(x-A)^2(x-B)} + \frac{\gamma_1 \alpha y}{(x-A)^3}$$
$$+ \frac{\gamma_2 \alpha z}{(x-A)^2(x-B)} + \frac{\beta\varphi_2}{(x-B)^2} + \frac{4\varphi_2\beta cy}{(x-A)(x-B)^3} + \frac{12\beta\varphi_2 dz}{(x-A)^4} + \frac{\varphi_2 B_1 z}{(x-B)^3} + \frac{\varphi_2 Ky}{(x-A)(x-B)^2} + \frac{\gamma_2\beta y}{(x-A)(x-B)^2}$$
$$+ \frac{\gamma_3\beta z}{(x-B)^3} + 2\left(\varphi_2\alpha + \varphi_1\beta\right)\left(\frac{by}{(x-A)^3(x-B)} + \frac{by}{(x-A)^2(x-B)^2} + \frac{cz}{(x-A)(x-B)^3} + \frac{cz}{(x-A)^2(x-B)^2}\right)$$
$$+ \frac{\delta\rho\left(\dfrac{\varphi_1 y}{(x-A)^2} + \dfrac{\varphi_2 z}{(x-B)^2}\right)}{2\left(\dfrac{\varphi_1^2}{(x-A)^2} + \dfrac{\varphi_2^2}{(x-B)^2}\right)} + \frac{\lambda(\varphi_2 y - \varphi_1 z)}{(x-A)(x-B)}. \tag{31}$$

Уравнения (10) и (11) приобретают вид соответственно

$$
\begin{gathered}
\frac{4b\alpha\varphi_1}{(x-A)^3(x-B)}+\frac{\varphi_1 K}{(x-A)^2(x-B)}+\frac{\alpha\gamma_2}{(x-A)^2(x-B)}+\frac{12\beta\varphi_2 d}{(x-B)^4}+\frac{\varphi_2\beta_1}{(x-B)^3} \\
+2c(\varphi_2\alpha+\varphi_1\beta)\left(\frac{1}{(x-B)^3(x-A)}+\frac{1}{(x-A)^2(x-B)^2}\right)+\frac{\dfrac{\varphi_2\delta\rho}{(x-B)^2}}{2\left(\dfrac{\varphi_1^2}{(x-A)^2}+\dfrac{\varphi_2^2}{(x-B)^2}\right)}+\frac{\gamma_3\beta}{(x-B)^3} \\
-\frac{\lambda\varphi_1}{(x-A)(x-B)}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda\varphi_1}{x-A}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\dfrac{\varphi_2\delta\rho}{x-B}}{\dfrac{\varphi_1^2}{(x-A)^2}+\dfrac{\varphi_2^2}{(x-B)^2}}\right)=0,
\end{gathered}
\tag{32}
$$

и

$$
\begin{gathered}
\frac{12a\alpha\varphi_1}{(x-A)^4}+\frac{\varphi_1 A_1}{(x-A)^3}+\frac{\alpha\gamma_1}{(x-A)^3}+\frac{4\beta\varphi_2 c}{(x-A)(x-B)^3}+\frac{\varphi_2 K}{(x-A)(x-B)^2} \\
+2b(\varphi_2\alpha+\varphi_1\beta)\left(\frac{1}{(x-A)^3(x-B)}+\frac{1}{(x-A)^2(x-B)^2}\right)+\frac{\dfrac{\varphi_1\delta\rho}{(x-B)^2}}{2\left(\dfrac{\varphi_1^2}{(x-A)^2}+\dfrac{\varphi_2^2}{(x-B)^2}\right)} \\
-\frac{\beta\gamma_2}{(x-A)(x-B)^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda\varphi_2}{x-B}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\dfrac{\varphi_1\delta\rho}{x-A}}{\dfrac{\varphi_1^2}{(x-A)^2}+\dfrac{\varphi_2^2}{(x-B)^2}}\right)=0.
\end{gathered}
\tag{33}
$$

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ $\delta\rho$ И λ

В (32) и (33) мы имеем дело с системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений для двух функций $\delta\rho$ и λ аргумента x. Общее решение должно содержать две произвольные постоянные c_1 и c_2. Как показывает проверка, оно имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
-\ \frac{\delta\rho+\rho'(L)\delta L}{2}=&\ \frac{\varphi_1^2 A_1}{(x-A)^3}+\frac{\varphi_1\varphi_2 K}{(x-A)^2(x-B)}+\frac{6a\alpha\varphi_1^2}{(x-A)^4}+\frac{2b\varphi_1(\beta\varphi_1+\alpha\varphi_2)}{(x-A)^3(x-B)}+\frac{\alpha\gamma_1\varphi_1}{(x-A)^3} \\
+&\ \frac{\beta\gamma_2\varphi_1}{(x-A)^2(x-B)}+\frac{\varphi_1 c_1}{(x-A)^2}+\frac{\varphi_1^2 B_1}{(x-B)^3}+\frac{\varphi_2\varphi_1 K}{(x-A)(x-B)^2}+\frac{6d\beta\varphi_2^2}{(x-B)^4}+\frac{2c\varphi_2(\alpha\varphi_2+\beta\varphi_1)}{(x-A)(x-B)^3} \\
+&\ \frac{2\varphi_1\varphi_2(b\alpha+c\beta)}{(x-A)^2(x-B)^2}+\frac{\beta\gamma_3\varphi_2}{(x-B)^3}+\frac{\alpha\gamma_2\varphi_2}{(x-A)(x-B)^2}+\frac{c_2\varphi_2}{(x-B)^2},
\end{aligned}
\tag{34}
$$

$$
\lambda=\frac{(x-A)(x-B)}{\varphi_2^2(x-A)^2+\varphi_1^2(x-B)^2}u, \tag{35}
$$

где

$$
\begin{aligned}
u\ =\ &\varphi_1\left(\frac{\beta\gamma_3+B_1\varphi_2}{x-B}+\frac{6d\beta\varphi_2}{(x-B)^2}+\frac{\alpha\gamma_2+K\varphi_1}{x-A}+\frac{2b\alpha\varphi_1}{(x-A)^2}+\frac{2c(\alpha\varphi_2+\beta\varphi_1)}{(x-A)(x-B)}\right) \\
-\ &\varphi_2\left(\frac{\alpha\gamma_1+A_1\varphi_1}{x-A}+\frac{6a\alpha\varphi_1}{(x-A)^2}+\frac{\beta\gamma_2+K\varphi_2}{x-B}+\frac{2c\beta\varphi_2}{(x-B)^2}+\frac{2b(\alpha\varphi_2+\beta\varphi_1)}{(x-A)(x-B)}\right)+c_2\varphi_1-c_1\varphi_2.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ВОЗМОЖНЫХ СЛУЧАЕВ

Обратим внимание, что в левой части (34) мы восстановили член с δL, имея в виду предстоящее обобщение на произвольную точку пространства. Действительно, выполнения условия $\delta L = 0$ упоминавшимся тривиальным смещением одновременно по аргументу L и функции $\rho(L)$ можно добитьсятолько на одной прямой, а во всем остальном пространстве приходится заменить $\delta\rho$ на комбинацию $\delta\rho + \rho'(L)\delta L$, инвариантную по отношению к таким смещениям. Роль x вне оси абсцисс играет L. Наконец, для определения различных параметров, входящих в правую часть выражения (34), надо временно представлять соответствующую нормаль совмещенной с осью x и при этом пользоваться нашими нормировочными предпосылками.

С другой стороны, правую часть (34) нетрудно представить суммой простейших дробей:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=4} \left[\frac{g_\nu}{(x-A)^\nu} + \frac{h_\nu}{(x-B)^\nu} \right], \tag{37}$$

где

$$g_4 = 6a\alpha\varphi_1^2, \; h_4 = 6d\beta\varphi_2^2,$$

$$g_3 = A_1\varphi_1^2 + \alpha\gamma_1\varphi_1 + \frac{2b\varphi_1(\beta\varphi_1 + \alpha\varphi_2)}{A-B},$$

$$h_3 = B_1\varphi_2^2 + \beta\gamma_3\varphi_2 + \frac{2c\varphi_2(\beta\varphi_1 + \alpha\varphi_2)}{B-A},$$

$$g_1 = -h_1 = \frac{1}{(B-A)^2}\left[\gamma_2(\alpha\varphi_2 - \beta\varphi_1) + \frac{2(b\varphi_1 + c\varphi_2)(\beta\varphi_1 + \alpha\varphi_2)}{A-B}\right]. \tag{38}$$

Выражения g_2 и h_2 не представляют для нас интереса ввиду наличия в их составе неизвестных величин c_1 и c_2.

Классифицируем все возможные случаи выполнения тождества (34). При этом, говоря о каком-то равенстве между параметрами, мы подразумеваем его справедливость во всем пространстве, иначе мы могли бы просто передать роль оси x другой нормали, чтобы избавиться от этого равенства.

Первый вариант — особый случай, когда $A = B$.

Второй вариант — это когда как A, так и B меняются от одной нормали к другой. Если $\delta L = 0$, то из (34) мы сразу можем выразить $\delta\rho$ в виде суммы слагаемых $(-L-A)^\nu$ и $(-L-B)^\nu$ с некоторыми коэффициентами, причем значения A и B берутся для оси абсцисс. Но тогда на любой прямой, где это пара принимает другие значения, получится очевидное противоречие (слева и справа опять разные функции от $L = -x$), кроме случая обращения в нуль всех коэффициентов. Если же δL переменно, то $\delta\rho$ и ρ' как два неизвестных определяются по двум прямым, на которых δL имеет разные значения, и снова получается противоречие, когда пара $(A,\, B)$ — численно иная, чем для этих двух прямых. Единственная оставшаяся возможность — обращение в нуль всей правой части (34).

При этом должны обращаться в нуль g_4 и h_4. С точностью до несущественной перемены ролями y и z возможны нижеследующие пять вариантов:

a) $a = d = 0$;
b) $a = 0, \beta = 0$;
c) $a = 0, \varphi_2 = 0$;
d) $\alpha = \beta = 0$;
e) $\alpha = 0, \varphi_2 = 0$

(вариант $F = \text{const}$ и $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ мы не рассматриваем, относя их далее к особому случаю).

При третьем варианте возможен случай, когда A постоянно, а B меняется в пространстве. Точно такие же рассуждения, как во втором случае, показывают, что наличие в правой части членов со степенями $(x-B)^{-1}$ приводит к противоречию, то есть должно быть $h_1 = \dots = h_4 = 0$. Кроме всегда присутствующего условия $A = \text{const}$, получаются следующие варианты:

a) $d = 0$;
b) $\varphi_2 = 0$;
c) $\beta = 0$.

Четвертый вариант — это когда A и B постоянны, но различны между собой.

Пятый вариант представляет особый случай, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Последний, шестой вариант — это еще один особый случай функциональной зависимости между n_y и n_z.

Рассмотрим эти случаи более подробно по порядку.

5. СЛУЧАЙ, СВЯЗАННЫЙ С СИСТЕМОЙ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Найдя пересечения близких нормалей (14) к поверхности $L = 0$, убеждаемся, что A и B — главные радиусы кривизны этой поверхности. Их совпадение в каждой точке означает, как известно (Sokolnikov, 1971), что данная поверхность оказывается сферой. При обычно предполагаемом совпадении центра сферы с началом координат имеем

$$L = -r = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{39}$$

$$n_x = \frac{x}{r},\ n_y = \frac{y}{r},\ n_z = \frac{z}{r},\ x = 0. \tag{40}$$

При нашей нестандартной системе координат и стандартной нормировке имеют место несколько иные выражения

$$n_x = -\frac{x+A}{r},\ n_y = -\frac{y}{r},\ n_z = -\frac{z}{r} \tag{41}$$

$$\chi = A(1-n_x) = \frac{A}{2}(n_y^2 + n_z^2) + \cdots , \tag{42}$$

$$r = \sqrt{(x+A)^2 + y^2 + z^2},\ L = -r, \tag{43}$$

причем члены третьей степени в разложении χ отсутствуют. Однако для непосредственного анализа системы уравнений (5)–(7) удобнее в данном случае выражения (39) и (40). Если везде разделить радиальную $\dfrac{\partial}{\partial r}$ и трансверсальную $\dfrac{1}{r}D_\perp$ производную (причем последняя сама еще является двумерным вектором, а $D_\perp$ означает дифференцирование по сфере (13)), то из (5) и (7) соответственно получается

$$\frac{2}{r^2}D_\perp F \times D_\perp \delta F + \rho'(-r)\delta L + \delta\rho(-r) = 0, \tag{44}$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\delta F + \frac{1}{r^2}D_\perp F \times D_\perp \delta L = 0. \tag{45}$$

Из уравнения (45) сразу следует

$$\delta F = \frac{1}{r}D_\perp F \times D_\perp \delta L + \varphi, \tag{46}$$

где φ зависит только от угловых координат. Подстановка (46) в (44) дает

$$\frac{2}{r^3}D_\perp F \times D_\perp(D_\perp F \times D_\perp \delta L) + \delta\rho(-r) + \frac{2}{r^2}D_\perp F \times D_\perp \varphi + \rho'(-r)\delta L = 0, \tag{47}$$

Будем считать, что между r^{-3}, r^{-2}, ρ' и $\delta\rho$ как функциями от r существуют две линейные зависимости. Тогда

$$\rho' = \frac{g}{r^2} + \frac{g_1}{r^3},$$

$$\rho = -\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{g}{g_1}\right)^2 + \varkappa, \tag{48}$$

$$\delta\rho = \frac{h_2}{r^2} + \frac{h_1}{r^3},\ (h_1,\, h_2,\, g,\, \varkappa,\, g_1 = \mathrm{const}). \tag{49}$$

$$2D_\perp F \times D_\perp(D_\perp F \times D_\perp \delta L) = g_1 \delta L + h_1, \tag{50}$$

$$2D_\perp F \times D_\perp \varphi = -g\delta L - h_2, \tag{51}$$

где

$$\varkappa = g_0 + \frac{g^2}{2g_1}.$$

Уравнением (50) задается некоторая связь между заданными функциями F и δL. Если представить, что какое-то решение для этой пары F и δL получено, то решение следующего уравнения (51) упрощается в том случае, когда можно определить функцию Φ на сфере, удовлетворяющую более простому уравнению

$$D_\perp F \times D_\perp \Phi = 1.$$

Действительно, тогда при $g_1 \neq 0$

$$\varphi = -\frac{g}{g_1}D_\perp F \times D_\perp \delta L + \frac{1}{2}\left(\frac{h_1 g}{g_1} - h_2\right)\Phi. \tag{52}$$

Обозначим для удобства коэффициент при Φ в последней формуле через Λ, т.е.

$$h_2 = \frac{h_1 g}{g_1} - 2\Lambda.$$

Подстановка (36) в (29) дает

$$\delta F = \left(\frac{1}{r} - \frac{g}{g_1}\right) D_\perp F \times D_\perp \delta L - \Lambda\Phi.$$

Невозможен еще второй случай, когда между четырьмя функциями от r, входящими в (47), присутствует только одна зависимость. Но тогда все их коэффициенты, зависящие от угловых координат, должны быть пропорциональны друг другу и, в частности, δL сведется к постоянной, даже просто к 0, из-за несущественности аддитивной постоянной. Но тогда в (47) остается

$$\frac{2}{r^2}D_\perp F \times D_\perp \varphi + \delta\rho(-r) = 0. \tag{53}$$

6. ПРИМЕНЕНИЕ ДАННОЙ ТЕОРИИ К ПОСТРОЕНИЮ ТРАЕКТОРИЙ

Напомним, что Antonov and Shamshiev (1992) остановились на том, что локальный интеграл исследуемой формы всегда позволяет представить дифференциальные уравнения траектории в виде (4). Причем поле скоростей $(u,\, v,\, w)$ определяется формулами

$$(u,\ v,\ w) = \nabla F \pm \nabla L\sqrt{\rho(L) + 2h}, \tag{54}$$

где h — постоянная энергии.

Система (4) имеет все же меньший порядок, чем исходные дифференциальные уравнения движения. Варьируя h в (54) и в интеграле энергии, легко получаем

$$u\frac{\partial G}{\partial x} + v\frac{\partial G}{\partial y} + w\frac{\partial G}{\partial z} = 1, \tag{55}$$

где

$$G = \pm \int \frac{dL}{\sqrt{\rho(L) + 2h}}.$$

Вдоль траектории (55) интегрируется очевидным образом. Уравнение траектории

$$G(x, y, z) = t - t_0 \; (t_0 = \text{const}). \tag{56}$$

Поверхности с $\rho(L) = -2h$ ограничивают область движения частицы. Интеграл (56) зависящий от времени и системы (4), существует всегда, но в данной статье, как уже объяснялось во Введении, мы рассматриваем случаи дальнейшей интегрируемости. Принцип остается тот же самый, но варьируется сейчас не h, а функции F, L и ρ. Тогда

$$(\delta u,\ \delta v,\ \delta w) = \nabla(\delta F + \delta M),$$

где

$$M = \pm \int \sqrt{\rho(L) + 2h}\, dL,$$

$$\delta M = \pm \int \frac{\delta\rho(L)}{\sqrt{\rho(L) + 2h}} dL \pm \sqrt{\rho(L) + 2h}\, \delta L,$$

а варьирование интеграла энергии приводит к

$$u\, \delta u + v\, \delta v + w\, \delta w = 0,$$

что после интегрирования вдоль траектории позволяет получить локальный интеграл движения

$$\delta F + \delta M = \text{const}. \tag{57}$$

Конкретные вычисления в основном варианте первого случая дают следующие формулы.

При $g_1 > 0$,

$$\delta M \; = \; 2\Lambda\sqrt{\frac{2}{g_1}} \arcsin\left(\frac{g_1 - g\,L}{L\sqrt{2g_1(2h + \varkappa)}}\right) - \frac{h_1}{g_1}\sqrt{2(2h + \varkappa) - \frac{(g_1 - gL)^2}{g_1 L}} + \sqrt{\rho(L) + 2h}\,\delta L + c_1. \tag{58}$$

При $g_1 < 0$,

$$\delta M = 2\Lambda\sqrt{\frac{2}{g_1}} \ln\left|\frac{1}{L} - \frac{g}{g_1} + \sqrt{\frac{2(2h+\varkappa)}{g_1} + \left(\frac{1}{L} - \frac{g}{g_1}\right)^2}\right| + \frac{h_1}{\sqrt{2g_1}}\sqrt{\frac{2(2h+\varkappa)}{g_1} + \left(\frac{1}{L} - \frac{g}{g_1}\right)^2} + \sqrt{\rho(L)+2h}\,\delta L + c_2. \tag{59}$$

При $g_1 = 0$,

$$\delta M = \left[\frac{1}{3L} - \frac{3g + 2(2h + g_0)}{3g}\right] \times \frac{2h_1}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{2h + g_0}{g} + \frac{1}{L}} \; + \; \sqrt{\rho(L) + 2h}\,\delta L + c_3.$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении отметим, что можно найти и третий инвариант, связующий x, y, z. Действительно, в определении φ в выражении (51) имеется произвол: к φ можно добавить с произвольным коэффициентом такую функцию $\tilde{\varphi}$ на сфере, линии уровня которой ортогональны линиям $F = \text{const}$. Поэтому $\tilde{\varphi} = \text{const}$ на траектории, что проверяется и непосредственно.

БЛАГОДАРНОСТИ

Эта статья посвящается светлой памяти Вадима Анатольевича Антонова и основана на докладах, представленных на конференциях «Современная звездная астрономия», которые проходили в Кавказской горной обсерватории ГАИШ МГУ имени М. В. Ломоносова 8–10 ноября 2022 г. и в Волгоградском государственном университете 15–19 мая 2023 г. Автор выражает благодарность организаторам этих конференций А. С. Расторгуеву и О. Ю. Малкову, а также их участникам за проявленный интерес к данной работе и обсуждение результатов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при частичной поддержке гранта FZ-20200929344, выделенного Министерством высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. A. Antonov, Vestnik LGU **19**, 97 (1981).
2. V. A. Antonov and F. T. Shamshiev, Astron. Zh. **69** (5), 971 (1992).
3. V. A. Antonov and F. T. Shamshiev, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **56** (3), 451 (1993). DOI:10.1007/BF00691813
4. V. A. Antonov and F. T. Shamshiev, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **59** (3), 209 (1994). DOI:10.1007/BF00692872
5. V. V. Golubev, *Lectures on integrating the equations of motion of a heavy rigid body around a fixed point* (Gosudarsnvennoe izdatel'stvo naucho-tekhnicheskoj literatury, Moscow, 1953) [in Russian].
6. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Field theory*, 6th ed. (Nauka, Moscow, 1973).
7. D. Lynden-Bell, Monthly Notices Royal Astron. Soc. **124**, 95 (1962). DOI:10.1093/mnras/124.2.95
8. D. Lynden-Bell, Monthly Notices Royal Astron. Soc. **458** (1), 726 (2016). DOI:10.1093/mnras/stw229
9. F. T. Shamshiev, Astronomical and Astrophysical Transactions **7** (4), 269 (1995). DOI:10.1080/10556799508203273
10. F. T. Shamshiev, in Proc. All-Russian Conf. on Astronomy at the Epoch of Multimessenger Studies, Moscow, Russia, 2021, Ed. by A. M. Cherepashchuk (Janus-K, Moscow, 2022), pp. 468–470. DOI:10.51194/VAK2021.2022.1.1.195
11. I. S. Sokolnikov, *Tensor analysis: Theory and applications in geometry and continuum mechanics* (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].

Cases of Further Integrability of the Equation of Motion in the Presence of the Local Integral in the Space Model. I

F. T. Shamshiev[1]

[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174 Uzbekistan

A local integral that allows us to immediately determine the velocity field for certain specific initial conditions was introduced Antonov and Shamshiev in 1992. We consider cases where the integrability of the trajectory can be advanced further. We then obtain an analytical relationship between x, y, z, t on a given trajectory. Possible cases are classified and one of them is analyzed.

Keywords: *methods: numerical—stellar dynamics: equation of motion*