

УДК 524.352:524.1-782

ВЗРЫВНЫЕ ВОЛНЫ С КОСМИЧЕСКИМИ ЛУЧАМИ

© 2015 Б. Арбутина*

Белградский университет, Белград, 11000 Сербия

Поступила в редакцию 8 декабря 2014 года; принята в печать 1 апреля 2015 года

Взрывные волны присутствуют во многих астрофизических явлениях, таких как сверхновые. В данной статье мы обсуждаем взрывные волны с космическими лучами, т.е. с компонентой со степенной функцией распределения плотности $N(p) \propto p^{-\Gamma}$, которая может быть особенно важной при описании эволюции остатков сверхновых. Мы подтверждаем некоторые предыдущие результаты о том, что существенное количество энергии космических лучей выделяется в направлении центра остатка.

Ключевые слова: ударные волны — сверхновые

1. ВВЕДЕНИЕ

Взрывные волны появляются при многих астрофизических явлениях, таких как сверхновые. В данной статье мы обсуждаем взрывные волны с космическими лучами (КЛ), т.е. с компонентой со степенной функцией распределения плотности $N(p) \propto p^{-\Gamma}$, где p — импульс частицы, а Γ — так называемый индекс энергии. Такие объяснения ударных волн могут быть особенно важны при описании эволюции остатков вспышек сверхновых, которые считаются основным источником галактических КЛ вплоть до энергий 10^{15} эВ.

Ударные волны с давлением космических лучей уже обсуждались в работах Шевалье [1, 2], Топтыгина [3], Петухова и др. [4] и, недавно, Белла [5]. Как и в работах Шевалье, мы будем полагать, что КЛ ускоряются на фронте ударной волны и адиабатически остывают в области за фронтом. Тем не менее, мы расширили анализ путем использования немного модифицированных условий скачка и проанализировали решения с разными индексами энергии.

2. АНАЛИЗ И РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Анализ подобия

Хорошо известно, что уравнения Эйлера позволяют автомодельные решения с введенной переменной $\xi = crt^{-\lambda}$, откуда получаем распространение радиуса как $R \propto t^\lambda$. Чтобы оценить эволюцию ударной волны со временем, можно воспользоваться теорией подобия. В предположении, что остаток сверхновой «забыл» точные

начальные условия взрыва сверхновой, только параметры E_o и ρ_o имеют значение. По размерности, $E_o = [\text{эрг}] = [\text{г см}^2 \text{ с}^{-2}]$, а $\rho_o = [\text{г см}^{-3}]$. Исключая $[\text{г}]$, получаем $E_o \times [\text{см}^{-2} \text{ с}^2] = \rho_o \times [\text{см}^3]$, т.е. $[\text{см}^5] = (E_o/\rho_o) \times [\text{с}^2]$, поэтому $R \propto (E_o/\rho_o)^{1/5} t^{2/5}$ и $\lambda = 2/5$.

Чтобы найти полное решение, перепишем переменную подобия в виде:

$$\xi = r/R(t), \quad R(t) = B(E_o/\rho_o)^{1/5} t^{2/5}, \quad (1)$$

где для нахождения B нужно решить уравнения Эйлера. Если мы просто имеем дело с обычным газом с $\gamma_g = 5/3$, получим известное решение Седова с $R = 1.15(E_o/\rho_o)^{1/5} t^{2/5}$ [6]. Если подобие сохраняется, ввод новой компоненты, связанной с космическими лучами, не изменит зависимость $R = R(t)$, а повлияет только на значение B .

2.2. Уравнение состояния космических лучей

Предположим, что КЛ имеют степенное распределение плотности $N(p) \propto p^{-\Gamma}$, т.е., что функция распределения в импульсном пространстве имеет вид $f = kp^{-\Gamma-2}$, где k — некая константа. По определению, давление и внутренняя энергия на единицу объема есть

$$P = \int_{p_0}^{p_\infty} 4\pi p^3 \frac{\partial E}{\partial p} f dp, \quad (2)$$

$$u = \int_{p_0}^{p_\infty} 4\pi p^2 (E - mc^2) f dp, \quad (3)$$

*E-mail: arbo@matf.bg.ac.rs

где энергия задается релятивистским выражением $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, m — масса частицы, c — скорость света, а p_0 и p_∞ — некоторые нижний и верхний пределы импульса соответственно.

Тогда для давления имеем

$$P = \int_{p_0}^{p_\infty} \frac{4\pi k}{3} p^{2-\Gamma} c^2 \frac{1}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} dp. \quad (4)$$

Интегрируя по частям, находим плотность внутренней энергии

$$u = \int_{p_0}^{p_\infty} 4\pi k p^{-\Gamma} \left(\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - m c^2 \right) dp$$

$$= \frac{3}{\Gamma - 1} P + \frac{4\pi k}{\Gamma - 1} \left[p_0^{1-\Gamma} \left(\sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} - m c^2 \right) - p_\infty^{1-\Gamma} \left(\sqrt{p_\infty^2 c^2 + m^2 c^4} - m c^2 \right) \right]. \quad (5)$$

Если $p_0 \ll mc$ и $p_\infty \rightarrow \infty$, для $2 < \Gamma < 3$ имеем

$$u \approx \frac{3}{\Gamma - 1} P. \quad (6)$$

Т.к. $u = \frac{1}{\gamma - 1} P$,

$$\gamma = \gamma_{CR} = \frac{\Gamma + 2}{3}. \quad (7)$$

Видно, что КЛ с $\Gamma \rightarrow 2$ ведут себя как ультра-релятивистский газ ($\gamma = 4/3$), тогда как КЛ с $\Gamma \rightarrow 3$ — как обычный газ с $\gamma = 5/3$.

2.3. Условия скачка

Если разделить ударную волну на три области:

- (0) дальнюю прифронтовую,
- (1) ближнюю прифронтовую (предшественницу),
- (2) зафронтовую,

то сохранение массы, импульса и энергии дают соотношения Ренкина–Гюгонно для сильных ударных волн

$$\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1 = \rho_0 v_0, \quad (8)$$

$$\rho_2 v_2^2 + P_{g2} + P_{CR2} = \rho_1 v_1^2 + P_{CR1} = \rho_0 v_0^2, \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} v_2 + \frac{\gamma_g}{\gamma_g - 1} \frac{P_{g2}}{\rho_2} + \frac{\gamma_{CR}}{\gamma_{CR} - 1} \frac{P_{CR2}}{\rho_2} = \frac{1}{2} v_0^2. \quad (10)$$

Мы не предполагали сохранение энергии в суб-волне (между областями (2) и (1)); положим $P_{CR2} = P_{CR1}$ [7], т.е., будем считать, что давление КЛ непрерывно — высокоэнергетические частицы не видят ударной волны, т.е. субволны.

Закон сохранения энергии также можно написать в виде

$$\frac{1}{2} v_2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{1}{2} v_0^2, \quad (11)$$

где мы определили эффективный γ -фактор таким образом, что

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{\gamma_g}{\gamma_g - 1} \beta + \frac{\gamma_{CR}}{\gamma_{CR} - 1} (1 - \beta), \quad (12)$$

где $\beta = P_{g2}/P_2$, $P_2 = P_{g2} + P_{CR2}$. Для полного скачка давления тогда имеем

$$X_{tot} = \frac{\rho_2}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (13)$$

и

$$P_{g2} = \frac{2\beta}{\gamma + 1} \rho_0 v_s^2, \quad (14)$$

$$P_{CR2} = \frac{2(1 - \beta)}{\gamma + 1} \rho_0 v_s^2, \quad (15)$$

$$v_2 = \frac{2}{\gamma + 1} v_s, \quad (16)$$

где $v_s = \dot{R} = -v_0$ — скорость ударной волны. Мы также знаем из теории ускорения рассеянных волн [8–10], что (см. уравнение (7))

$$X = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\Gamma + 2}{\Gamma - 1} = \frac{\gamma_{CR}}{\gamma_{CR} - 1}, \quad (17)$$

а из закона сохранения импульса мы можем получить соотношение

$$X - 1 = \beta(X_{tot} - 1). \quad (18)$$

Совмещая (6), (7), (11) и (12), мы окончательно имеем (см. также рис. 1)

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{1 - 2 \frac{\gamma_g - \gamma_{CR}}{\gamma_g - 1}}}{2 \frac{\gamma_g - \gamma_{CR}}{\gamma_g - 1}}, \quad (19)$$

$$\gamma = 1 + 2\beta(\gamma_{CR} - 1). \quad (20)$$

2.4. Автомодельный вид уравнений Эйлера

Используя уравнения (13)–(16), мы можем определить безразмерные плотность F , давление газа G , давление КЛ H и скорость U следующим образом:

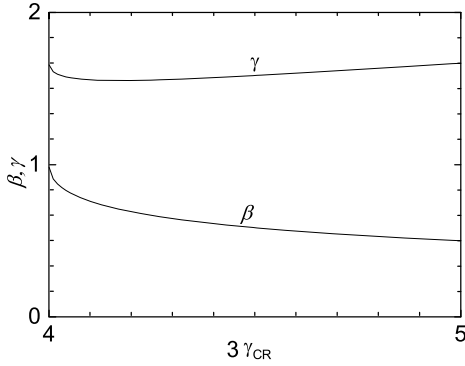


Рис. 1. Зависимость β и γ от γ_{CR} .

$$\rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0 F(\xi) \quad (21)$$

$$P_g = \frac{2\beta}{\gamma + 1} \rho_0 \dot{R}^2 G(\xi) \quad (22)$$

$$P_{CR} = \frac{2(1 - \beta)}{\gamma + 1} \rho_0 \dot{R}^2 H(\xi) \quad (23)$$

$$v = \frac{2}{\gamma + 1} \dot{R} U(\xi). \quad (24)$$

На фронте ударной волны ($\xi = 1$) граничные условия будут $F(1) = G(1) = U(1) = 1$. С этими последними выражениями и частными производными

$$\frac{\partial}{\partial t} = \dot{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} - \frac{\xi}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (26)$$

мы можем перейти к сферически-симметричным уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0, \quad (27)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial P_g}{\partial r} - \frac{\partial P_{CR}}{\partial r}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{D(P_g \rho^{-\gamma_g})}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} (P_g \rho^{-\gamma_g}) \\ + v \frac{\partial}{\partial r} (P_g \rho^{-\gamma_g}) &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{D(P_{CR} \rho^{-\gamma_{CR}})}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} (P_{CR} \rho^{-\gamma_{CR}}) \\ + v \frac{\partial}{\partial r} (P_{CR} \rho^{-\gamma_{CR}}) &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\frac{D}{Dt}$ – производная Лагранжа или субстанциональная производная.

Уравнение непрерывности (27) дает нам

$$\left(\frac{U}{\xi} - \frac{\gamma + 1}{2} \right) \xi \frac{F'}{F} + U' + \frac{2}{\xi} U = 0, \quad (31)$$

а с помощью (27), уравнения энтропии (29) и (30) можно проинтегрировать и получить

$$G F^{1-\gamma_g} \left(\frac{U}{\xi} - \frac{\gamma + 1}{2} \right) = \frac{1 - \gamma}{2\xi^3}, \quad (32)$$

$$H F^{1-\gamma_{CR}} \left(\frac{U}{\xi} - \frac{\gamma + 1}{2} \right) = \frac{1 - \gamma}{2\xi^3}. \quad (33)$$

Во всех выражениях мы будем использовать следующую систему обозначений:

$$f' = \frac{df}{d\xi}, \quad f = \{F, G, H, U\}.$$

Наконец, напишем автомодельный вид уравнения импульса (28):

$$\xi \left[\left(\frac{2}{\gamma + 1} \frac{U}{\xi} - 1 \right) U' - \frac{3U}{2\xi} \right] \quad (34)$$

$$+ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{F} [\beta G' + (1 - \beta) H'] = 0.$$

Если использовать уравнения (32) и (33), чтобы найти G' и H' , и подставить их в (34), то с небольшими преобразованиями уравнения (34) и (31) становятся

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{1}{\xi} \left\{ \frac{(\gamma - 1)^2 \left[\beta F^{\gamma_g - 2} \left(\frac{3}{2}(\gamma + 1)\xi - 2\gamma_g U \right) + (1 - \beta) F^{\gamma_{CR} - 2} \left(\frac{3}{2}(\gamma + 1)\xi - 2\gamma_{CR} U \right) \right]}{(\gamma - 1)^2 [\beta \gamma_g F^{\gamma_g - 2} + (1 - \beta) \gamma_{CR} F^{\gamma_{CR} - 2}] + 4\xi^2 \left[U - \frac{\gamma + 1}{2} \xi \right]^3} + \frac{3(\gamma + 1)\xi^3 U \left[U - \frac{\gamma + 1}{2} \xi \right]^2}{(\gamma - 1)^2 [\beta \gamma_g F^{\gamma_g - 2} + (1 - \beta) \gamma_{CR} F^{\gamma_{CR} - 2}] + 4\xi^2 \left[U - \frac{\gamma + 1}{2} \xi \right]^3} \right\}, \quad (35)$$

$$\frac{dF}{d\xi} = -\frac{F}{U - \frac{\gamma + 1}{2} \xi} \left\{ \frac{\frac{3}{2}(\gamma + 1)(\gamma - 1)^2 [\beta F^{\gamma_g - 2} + (1 - \beta) F^{\gamma_{CR} - 2}]}{(\gamma - 1)^2 [\beta \gamma_g F^{\gamma_g - 2} + (1 - \beta) \gamma_{CR} F^{\gamma_{CR} - 2}] + 4\xi^2 \left[U - \frac{\gamma + 1}{2} \xi \right]^3} + \frac{\xi U [8U - (\gamma + 1)\xi] \left[U - \frac{\gamma + 1}{2} \xi \right]^2}{(\gamma - 1)^2 [\beta \gamma_g F^{\gamma_g - 2} + (1 - \beta) \gamma_{CR} F^{\gamma_{CR} - 2}] + 4\xi^2 \left[U - \frac{\gamma + 1}{2} \xi \right]^3} \right\}. \quad (36)$$

Эти два последних уравнения нужно решать численно; для этого, мы воспользовались интегратором Рунге–Кутты шестого порядка [11]. Результаты показаны на рис. 2. По мере приближения к центру $\xi \rightarrow 0$, если $\beta \neq 1$, то скорость становится приблизительно $U \approx \frac{\gamma + 1}{2\gamma_{CR}} \xi$, а $F \propto \xi^{3/(\gamma_{CR} - 1)}$, $G \propto \xi^{3(\gamma_g - \gamma_{CR})/(\gamma_{CR} - 1)}$, $H \propto \text{const}$. Если $\beta = 1$, получаем результаты решения Седова:

$$U \approx \frac{\gamma_g + 1}{2\gamma_g} \xi, \quad F \propto \xi^{3/(\gamma_g - 1)} \quad \text{и} \quad G \propto \text{const}.$$

2.5. Интеграл энергии

Рассмотрим теперь движущуюся поверхность с $\xi = \text{const}$. Энергия в пределах этой поверхности равна

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_0^{r(\xi)} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{\gamma_g - 1} P_g + \frac{1}{\gamma_{CR} - 1} P_{CR} \right) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{8\pi}{\gamma + 1} \rho_o \dot{R}^2 R^3 \int_0^\xi \left(\frac{1}{\gamma - 1} F U^2 + \frac{\beta}{\gamma_g - 1} G + \frac{1 - \beta}{\gamma_{CR} - 1} H \right) \xi^2 d\xi \\ &= \frac{32\pi}{25(\gamma + 1)} B^5 E_o \int_0^\xi \left(\frac{1}{\gamma - 1} F U^2 + \frac{\beta}{\gamma_g - 1} G + \frac{1 - \beta}{\gamma_{CR} - 1} H \right) \xi^2 d\xi, \end{aligned} \quad (37)$$

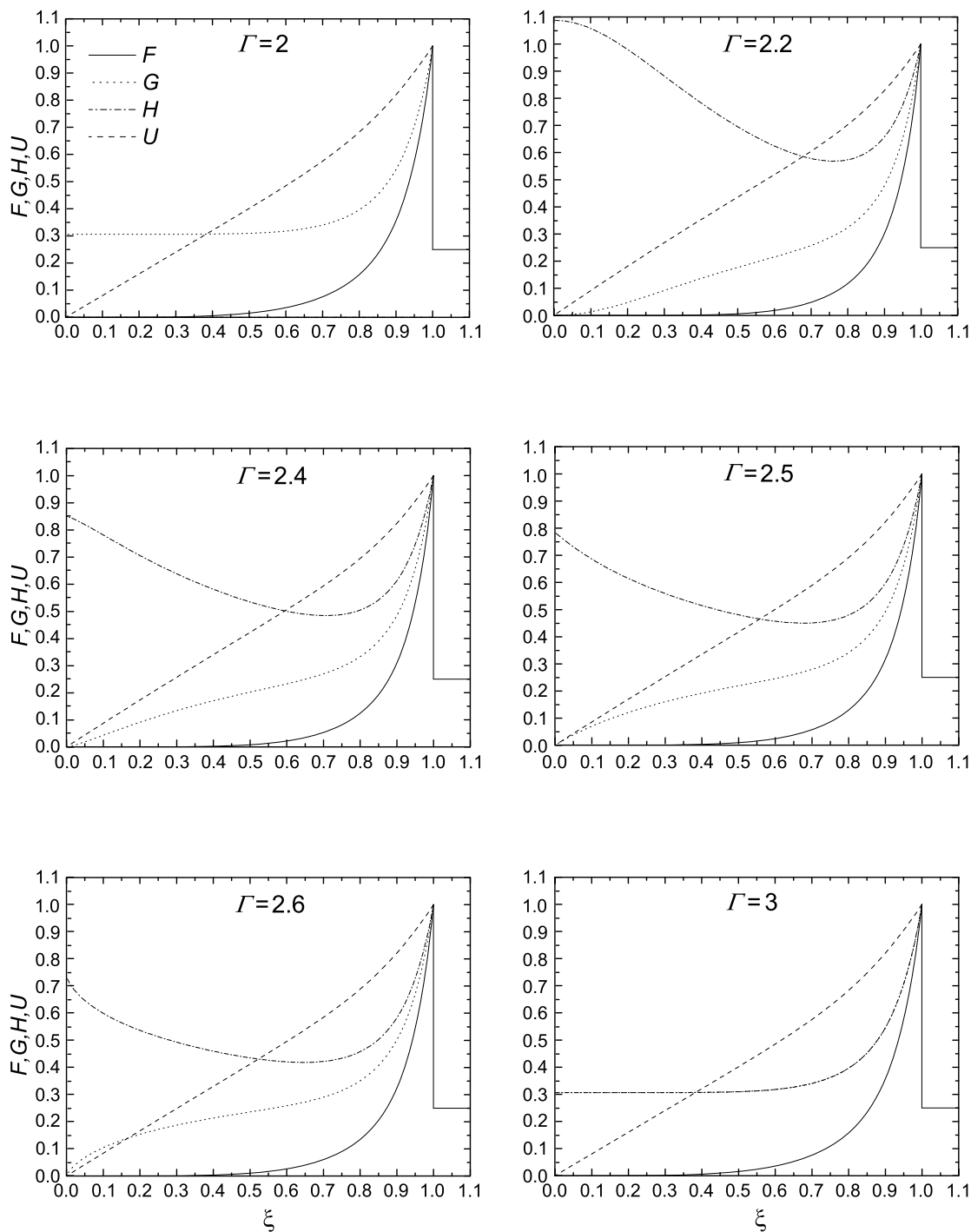


Рис. 2. Полные решения для разных индексов энергии Γ . Обозначения одинаковы на всех рисунках.

где мы воспользовались тем фактом, что

$$\dot{R}^2 R^3 = \frac{4E_o}{25\rho_o} B^5.$$

Если для движущейся поверхности мы примем

$\xi = 1$ (фронт ударной волны), уравнение (37) даст нам полную энергию взрыва E_o в виде суммы кинетической энергии, внутренней энергии газа и энергии КЛ:

Параметры решений для разных индексов энергии Γ . E_o — энергия взрыва, T_o — полная кинетическая энергия, $U_{o,g}$ — полная тепловая энергия, $U_{o,CR}$ — полная энергия КЛ. В последних двух колонках представлены соотношения давлений в центре и на фронте ударной волны для газа и КЛ — P_{g0}/P_{g2} и P_{CR0}/P_{CR2} . Другие параметры см. в тексте.

Γ	γ_g	γ_{CR}	β	γ	X	X_{tot}	B	T_o/E_o	$U_{o,g}/E_o$	$U_{o,CR}/E_o$	P_{g0}/P_{g2}	P_{CR0}/P_{CR2}
2	5/3	4/3	1	1.67	4	4	1.152	0.283	0.717	0	0.306	0
2.1	5/3	1.37	0.76	1.56	3.73	4.59	1.090	0.245	0.356	0.399	0	1.401
2.2	5/3	7/5	0.69	1.55	3.5	4.62	1.092	0.247	0.324	0.429	0	1.088
2.3	5/3	1.43	0.65	1.56	3.31	4.57	1.099	0.252	0.315	0.433	0	0.941
2.4	5/3	1.47	0.61	1.57	3.14	4.5	1.107	0.257	0.315	0.428	0	0.849
2.5	5/3	3/2	0.59	1.59	3	4.41	1.115	0.262	0.319	0.418	0	0.784
2.6	5/3	1.53	0.56	1.60	2.88	4.33	1.123	0.267	0.325	0.407	0	0.733
2.7	5/3	1.57	0.54	1.62	2.76	4.24	1.131	0.272	0.333	0.395	0	0.687
2.8	5/3	8/5	0.53	1.63	2.67	4.16	1.138	0.276	0.341	0.383	0	0.623
2.9	5/3	1.63	0.51	1.65	2.58	4.08	1.145	0.279	0.350	0.371	0	0.501
3	5/3	5/3	0.5	1.67	2.5	4	1.152	0.283	0.359	0.359	0.306	0.306

$$E_o = T_o + U_{o,g} + U_{o,CR}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^R \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{\gamma_g - 1} P_g + \frac{1}{\gamma_{CR} - 1} P_{CR} \right) 4\pi r^2 dr \\
 &= \frac{32\pi}{25(\gamma + 1)} B^5 E_o \int_0^1 \left(\frac{1}{\gamma - 1} F U^2 + \frac{\beta}{\gamma_g - 1} G + \frac{1 - \beta}{\gamma_{CR} - 1} H \right) \xi^2 d\xi,
 \end{aligned} \tag{38}$$

что позволит нам найти B :

$$B^{-5} = \frac{32\pi}{25(\gamma + 1)} \int_0^1 \left(\frac{1}{\gamma - 1} F U^2 + \frac{\beta}{\gamma_g - 1} G + \frac{1 - \beta}{\gamma_{CR} - 1} H \right) \xi^2 d\xi, \tag{39}$$

а также доли T_o/E_o , $U_{o,g}/E_o$ и $U_{o,CR}/E_o$ (см. таблицу).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы обсудили ударные волны с космическими лучами, т.е. с компонентой со степенной функцией распределения плотности $N(p) \propto p^{-\Gamma}$, которая приводит к возникновению дополнительного давления P_{CR} , связанного с КЛ.

Мы проанализировали решения с разными индексами энергии Γ и вычислили параметры этих решений.

Мы подтверждаем некоторые более ранние сведения о том, что значительная доля энергии космических лучей выделяется в сторону центра остатка [2]. В большинстве наших моделей давление КЛ в центре сравнимо с давлением на фронте ударной волны. Если плотности энергии КЛ и магнитного поля распределены равномерно [12, 13], $u_B = \frac{1}{8\pi} B^2 \approx \frac{\Gamma + 1}{4} u_{CR}$, т.к.

синхротронная объемная излучательная способность $\epsilon_\nu \propto u_{\text{CR}} B^{1+\alpha} \nu^{-\alpha}$, где ν — частота, а $\alpha = (\Gamma - 1)/2$ — спектральный индекс, то в дополнение к излучению от фронта ударной волны возможно также наличие сравнимого излучения из центра. Поэтому такое выделение энергии КЛ может служить объяснением для радиоизлучения некоторых остатков сверхновых с заполненным центром.

БЛАГОДАРНОСТИ

Во время работы над данной статьей автору была оказана финансовая поддержка Министерства образования, науки и технологического развития Республики Сербия (проекты 176004 «Звездная физика» и 176005 «Эмиссионные туманности: структура и эволюция»). Автор также хотел бы воспользоваться возможностью поблагодарить Aşkın Ankaş и Deniz Göker за гостеприимство и возможность представить данную тему на семинаре физического факультета Босфорского университета Стамбуле в феврале 2015 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. A. Chevalier, in *Proc. 18th Int. Cosmic Ray Conf.* (Tata Institute of Fundamental Research, 1983), Vol. 2, p. 314.
2. R. A. Chevalier, *Astrophys. J.* **272**, 765 (1983).
3. I. N. Toptygin, *Astronomy Letters* **26**, 356 (2000).
4. Yu. V. Petukhov, A. V. Razin, and V. A. Razin, *Astronomy Letters* **32**, 747 (2006).
5. A. R. Bell, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **447**, 2224 (2015).
6. L. I. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* (Academic Press, New York, 1959).
7. L. O. C. Drury, *Rep. Prog. Phys.* **46**, 973 (1983).
8. A. R. Bell, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **182**, 147 (1978).
9. A. R. Bell, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **182**, 443 (1978).
10. R. D. Blandford and J. P. Ostriker, *Astrophys. J.* **221**, L29 (1978).
11. H. A. Luther, *Math. Comp.* **22**, 434 (1968).
12. B. Arbutina, D. Urošević, M. M. Andjelić, et al., *Astrophys. J.* **746**, 79 (2012).
13. B. Arbutina, D. Urošević, M. M. Vučetić, et al., *Astrophys. J.* **777**, 31 (2013).

Перевод Е. Чмырёвой

Blast Waves with Cosmic Rays

B. Arbutina

Blast waves appear in many astrophysical phenomena, such as supernovae. In this paper we discuss blast waves with cosmic rays, i.e., with a component with a power-law number density distribution function $N(p) \propto p^{-\Gamma}$ that may be particularly important in describing the evolution of supernova remnants. We confirm some previous findings that a significant amount of cosmic ray energy is deposited towards the center of a remnant.

Keywords: *shock waves—supernovae: general*