

КОРРЕКЦИЯ РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ, ИСКАЖЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ АТМОСФЕРЫ

П. А. Фридман

Турбулентная атмосфера рассматривается как фильтр с переменными параметрами (случайной пространственной фазо-частотной характеристикой). Получено выражение для среднеквадратичного отклонения радиоастрономического изображения от истинного распределения яркостной температуры по объекту (дефект верности). Рассмотрена возможность коррекции радиоизображения путем оптимальной фильтрации по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (приводится уравнение частотной характеристики оптимального фильтра и выражение для ошибки после фильтрации). Сравнивается эффективность накопления сигналов для систем апертурного синтеза и для сплошных антенн в предположении, что флуктуации фазы в смежных наблюдениях независимы.

The turbulent atmosphere is considered as a filter with variable parameters (with a random spatial phase-frequency characteristic). An expression is derived for the root-mean-square deviation of a radio-astronomical image from the true brightness-temperature distribution over an object (correctness defect). The possibility of the radio-image correction by way of optimal filtering by the criterion of minimum of the mean standard error is discussed (an equation for the frequency characteristic of an optimal filter and an expression for the error after filtering are given). The signal accumulation efficiency for aperture-synthesis system is compared with that for fully-filled apertures under the assumption that the phase fluctuations in adjacent observations are independent.

Влияние турбулентности атмосферы на параметры больших антенных систем рассматривалось в ряде работ [1, 2, 3 и др.]. При этом оценивалось изменение формы диаграммы направленности, коэффициента направленного действия, уровня боковых лепестков. Наиболее общая задача, которая решается при обзоре неба большими радиотелескопами, — это формирование радиоастрономического изображения, получение распределения яркостной температуры неба. Поэтому представляется целесообразным оценить искажения такого изображения, возникающие при прохождении радиоволн через турбулентную атмосферу.

Общепринятым способом описания антенны в радиоастрономии является представление ее в виде пространственного фильтра, которое удобно применять как для сплошных антенн, так и для систем апертурного синтеза. Основываясь на этом представлении, можно производить и коррекцию радиоизображения, учитывая частотную характеристику антенны-фильтра [4]. Обычно при таком рассмотрении предполагается, что антенна вносит только амплитудно-частотные искажения в пространственный спектр исследуемого распределения радиояркостности объекта.

Мешающее действие атмосферы в процессе наблюдения, если пренебречь поглощением радиоволн в ней, обусловлено наличием флуктуаций электрических длин путей радиоволн, падающих на антенну. Возникающие в результате этого флуктуации фазы приводят к искажениям радиоизображения. Так например, для двухантенного интерферометра случай-

ный сдвиг фазы между колебаниями, принимаемыми его антеннами, порождает численно равный ему сдвиг фазы регистрируемой пространственной гармоники. Это позволяет рассматривать атмосферу как пространственный фильтр с переменными случайными параметрами. Амплитудно-частотную характеристику этого фильтра можно считать не зависящей от частоты и равной единице, а его фазо-частотная характеристика представляет собой случайную функцию частоты (см. рис. 1). Более строгое доказательство возможности такого подхода имеется в ряде работ, посвященных исследованию влияния неоднородностей атмосферы на оптическое изображение, например в [5].

Оценим вносимые турбулентной атмосферой искажения в распределение радиояркости объекта. Будем рассматривать одномерный случай. Пусть $T(x)$ — истинное распределение яркостной температуры по небу

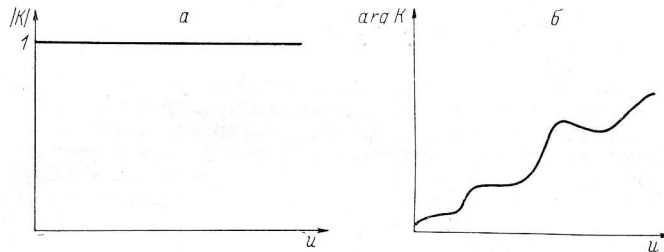


Рис. 1. Амплитудно-частотная (а) и фазо-частотная (б) характеристики фильтра пространственных частот, соответствующего турбулентной атмосфере.

u — частота, $|K|$ — амплитудно-частотная характеристика, $\arg K$ — фазо-частотная характеристика.

(входной сигнал), $T'(x)$ — распределение радиояркости, соответствующее изображению после прохождения радиоизлучения через атмосферу, $K(u)$ — коэффициент передачи атмосферного пространственного фильтра, x — угловая координата, u — пространственная частота. Найдем среднеквадратичное отклонение функции $T'(x)$ от $T(x)$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2 \rangle &= \langle [T'(x) - T(x)]^2 \rangle = \langle [T'(x)]^2 \rangle - 2 \langle T(x) \cdot T'(x) \rangle + \langle [T(x)]^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} \langle |K(u)|^2 \rangle |\tilde{T}(u)|^2 du - 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} \langle K(u) \rangle |\tilde{T}(u)|^2 du + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} |\tilde{T}(u)|^2 du, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tilde{T}(u)$ — пространственный спектр объекта, $u_{\text{гр}}$ — граничная пространственная частота, определяемая размерами апертуры (синтезируемой или сплошной), $\langle \rangle$ означает усреднение по ансамблю. Так как мы пренебрегаем поглощением радиоволн, то коэффициент передачи $K(u)$ имеет модуль, равный единице, и записывается в виде

$$K(u) = e^{j\varphi(u)}, \quad (2)$$

где $\varphi(u)$ — случайная функция пространственной частоты, с нормальным распределением, с нулевым средним и следующей зависимостью дисперсии от частоты (структурной функцией):

$$D_{\varphi}(u) = A |u|^{5/3}. \quad (3)$$

Здесь A — коэффициент, зависящий от длины пути волны в турбулентной среде, длины волны и метеорологических условий, принимает значения от $4.5 \cdot 10^{-7}$ до $4.5 \cdot 10^{-9}$. Учитывая (2) и (3), приходим к выводу, что третий член в (1) равен первому, а второй член перепишем следующим образом:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} \langle K(u) \rangle |\tilde{T}(u)|^2 du = \frac{1}{\pi} \int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} e^{-\frac{1}{2} D_{\varphi}(u)} |\tilde{T}(u)|^2 du. \quad (4)$$

Здесь мы воспользовались нормальным распределением величины φ и равенством нулю ее постоянной составляющей, поскольку имеет место соотношение

$$\langle e^{j\varphi} \rangle = e^{-\frac{1}{2} D_{\varphi}(u)}.$$

Таким образом, среднеквадратичное отклонение функции $T'(x)$ и $T(x)$ составит

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2 \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} |\tilde{T}(u)|^2 du - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} e^{-\frac{1}{2} D_{\varphi}(u)} |\tilde{T}(u)|^2 du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} |\tilde{T}(u)|^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{2} D_{\varphi}(u)} \right) du. \quad (5) \end{aligned}$$

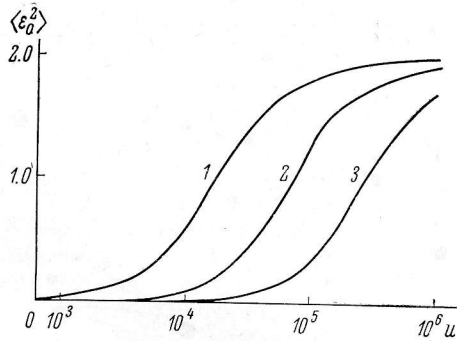


Рис. 2. Зависимость нормированного среднеквадратичного отклонения (дефекта верности) от пространственной частоты при различных значениях коэффициента A .

1 — $4.5 \cdot 10^{-7}$, 2 — $4.5 \cdot 10^{-8}$, 3 — $4.5 \cdot 10^{-9}$.

На рис. 2 приведена зависимость среднеквадратичного отклонения (дефекта верности), нормированного по энергии сигнала, $\langle \varepsilon_0^2 \rangle$, от пространственной частоты в предположении, что в пределах полосы пропускания $(-u_{\text{гр}}; u_{\text{гр}})$ $\tilde{T}(u) = \text{const}$ для разных значений коэффициента A .

Рассмотрим теперь вопрос об оптимальной линейной фильтрации (по Винеру), уменьшающей ошибку (5). Уравнение частотной характеристики оптимального линейного фильтра можно получить, воспользовавшись в качестве исходного выражения формулой для оптимального линейного фильтра I типа в задаче о простой фильтрации ([6], стр. 21)

$$K_{\text{онт}}(u) = \frac{S_{T'T}(u)}{S_{T'}(u)}, \quad (6)$$

где $S_{T'T}(u)$ — взаимный спектр искаженного помехой и неискаженного сигналов, $S_{T'}(u)$ — спектр интенсивности искаженного помехой сигнала. Эта формула выведена при достаточно общих предположениях о характере помехи, что позволяет использовать ее и при мультипликативной помехе, рассматриваемой в настоящей статье. В нашем случае

$$\begin{aligned} S_{T'T}(u) &= K^*(u) |\tilde{T}(u)|^2, \\ S_{T'}(u) &= |K(u)|^2 |\tilde{T}(u)|^2 + N(u). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $N(u)$ — спектральная интенсивность аддитивного шума, всегда присутствующего при наблюдениях.

Подставляя (7) в (6) и переходя к средним значениям, имеем

$$K_{\text{онт}}(u) = \frac{\langle K^*(u) \rangle |\tilde{T}(u)|^2}{\langle |K(u)|^2 \rangle |\tilde{T}(u)|^2 + N(u)}. \quad (8)$$

Среднеквадратичная ошибка на выходе оптимального фильтра составляет (см. [6])

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{онт}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} \frac{S_T(u) S_{T'}(u) - S_{TT'}(u) S_{TT'}(-u)}{S_{T'}(u)} du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} |\tilde{T}(u)|^2 \left(1 - \frac{\langle K(u) \rangle^2 |\tilde{T}(u)|^2}{\langle |K(u)|^2 \rangle |\tilde{T}(u)|^2 + N(u)} \right) du. \end{aligned} \quad (9)$$

Подробный вывод аналогичных выражений для двумерного случая имеется в [7].

Если пренебречь аддитивной помехой, воспользоваться формулой (2) и считать $\tilde{T}(u) = \text{const}$, уравнения (8) и (9) можно переписать в более простом виде

$$K_{\text{онт}}(u) = e^{-\frac{1}{2} D_{\varphi}(u)}, \quad (8')$$

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{онт}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} |\tilde{T}(u)|^2 \left(1 - e^{-D_{\varphi}(u)} \right) du. \quad (9')$$

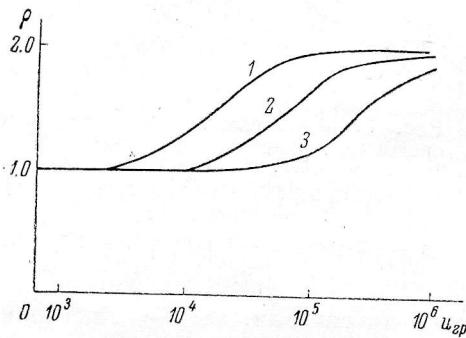


Рис. 3. Зависимость выигрыша ρ при оптимальной линейной фильтрации от граничной пространственной частоты при различных значениях коэффициента A .
1 — $4.5 \cdot 10^{-7}$, 2 — $4.5 \cdot 10^{-8}$, 3 — $4.5 \cdot 10^{-9}$.

Выигрыш ρ за счет такой обработки сигнала выразим с помощью отношения ошибки до оптимального фильтра к ошибке после оптимального фильтра (учитывая (5) и (9))

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\langle \varepsilon^2 \rangle}{\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{онт}}} = 2 \times \\ &\times \frac{\int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2} D_{\varphi}(u)} \right) du}{\int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} \left(1 - e^{-D_{\varphi}(u)} \right) du}. \end{aligned} \quad (10)$$

На рис. 3 показана зависимость ρ от $u_{\text{гр}}$. При больших значениях $u_{\text{гр}}$ ρ стремится к 2, что соответствует выигрышу при обработке в $\sqrt{2}$ раза в отношении сигнала к шуму.

Оценим эффективность многократных наблюдений одного и того же участка неба с последующей коррекцией радиоизображения. Флуктуации фазы в смежные сеансы наблюдений будем считать независимыми. Запишем выражение для измеренной фазы при одиночном наблюдении объекта интерферометром с переменной базой (измеряющим амплитуды и фазы пространственных гармоник)

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}_a + \tilde{\varphi}_r. \quad (11)$$

Здесь φ_0 — среднее значение фазы, подлежащее измерению; $\tilde{\varphi}_a$ — случайный набег фазы при прохождении через атмосферу (нормальная слу-

чайная величина с нулевым средним и дисперсией $D_\varphi(u)$ $\tilde{\varphi}_r$ — ошибка измерения, обусловленная аддитивными шумами. При усреднении n значений фазы φ , полученных при n наблюдениях одного и того же объекта, дисперсия измерений уменьшается в n раз. Учитывая только $\tilde{\varphi}_a$, ошибку (5) перепишем при усреднении в следующем виде:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle^n = \frac{1}{\pi} \int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} |\tilde{T}(u)|^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \frac{D_\varphi(u)}{n}} \right) du. \quad (12)$$

Коррекция после накопления сигнала осуществляется с помощью фильтра с частотной характеристикой

$$K_{\text{онт}}^{(n)}(u) = e^{-\frac{1}{2} \frac{D_\varphi(u)}{n}} = \sqrt[n]{K_{\text{онт}}(u)}. \quad (13)$$

Такой способ обработки (накопление и коррекция по формуле (13)) осуществим в системах апертурного синтеза, где информация об амплитудах и фазах пространственных гармоник поступает отдельно.

Рассмотрим применение накопления при наблюдениях на сплошной антенне. В работе [2] получено выражение для диаграммы направленности по мощности линейной антенны при частично когерентном облучении, причем флуктуации фазы характеризуются структурной функцией вида (3). Воспользовавшись этими результатами для системы «атмосфера — антенна», получаем формулу среднего коэффициента передачи.

$$\langle K_A(u) \rangle = \langle K(u) \rangle A(u) = e^{-\frac{1}{2} D_\varphi(u)} A(u). \quad (14)$$

Здесь $A(u)$ — коэффициент передачи антенны как фильтра пространственных частот (вещественная функция). Такой средний коэффициент передачи может быть получен при усреднении бесконечно большого числа записей прохождений объекта. При этом, в силу убывающего характера

функции $e^{-\frac{1}{2} D_\varphi(u)}$, произойдет снижение контраста в области высоких частот. «Исправить» изображение можно с помощью фильтра с частотной характеристикой

$$K_A^{-1}(u) = \frac{1}{A(u)} e^{\frac{1}{2} D_\varphi(u)}. \quad (15)$$

Но это предельный случай; на практике можно осуществить конечное число n усреднений. Коэффициент передачи эквивалентного фильтра при суммировании n записей прохождения объекта дается следующей формулой:

$$K^\Sigma(u) = \frac{A(u)}{n} \sum_{i=1}^n e^{j\varphi_i(u)}. \quad (16)$$

Подставляя это выражение в уравнение оптимального линейного фильтра (8), получим

$$K_{\text{онт}}^\Sigma(u) = \frac{A^*(u) \cdot \frac{1}{n} \left\langle \sum_{i=1}^n e^{j\varphi_i(u)} \right\rangle |\tilde{T}(u)|^2}{[A(u)]^2 \cdot \frac{1}{n^2} \left\langle \left| \sum_{i=1}^n e^{j\varphi_i(u)} \right|^2 \right\rangle |\tilde{T}(u)|^2 + N(u) \cdot \frac{1}{n}}. \quad (17)$$

Множитель $\frac{1}{n}$ в знаменателе при $N(u)$ учитывает эффект усреднения аддитивных шумов. Произведем некоторые упрощения. Положим $\tilde{T}(u) = \text{const}$, $N(u) \cdot \frac{1}{n} \cong 0$, тогда

$$\left\langle \sum_{i=1}^n e^{j\varphi_i(u)} \right\rangle = n e^{-\frac{1}{2} D\varphi(u)},$$

$$\left\langle \left| \sum_{i=1}^n e^{j\varphi_i(u)} \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left[\sum_{i=1}^n \cos \varphi_i(u) \right]^2 \right\rangle + \left\langle \left[\sum_{i=1}^n \sin \varphi_i(u) \right]^2 \right\rangle.$$

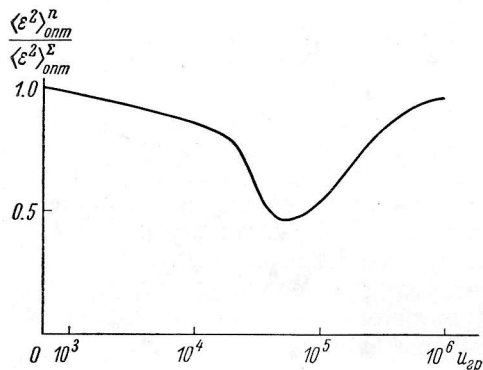


Рис. 4. Отношение среднеквадратичной ошибки при накоплении с раздельным приемом амплитуд и фаз пространственных гармоник к среднеквадратичной ошибке при работе со сплошной антенной как функция граничной пространственной частоты.

При достаточно большом n величины $\sum_{i=1}^n \cos \varphi_i$ и $\sum_{i=1}^n \sin \varphi_i$ можно считать нормальными случайными величинами, вторые моменты которых соответственно равны:

$$m_2^I = n^2 e^{-D\varphi(u)} + \frac{n}{2} e^{-2D\varphi(u)} +$$

$$+ \frac{n}{2} - n e^{-D\varphi(u)},$$

$$m_2^{II} = \frac{n}{2} - \frac{n}{2} e^{-2D\varphi(u)}.$$

С учетом этих выражений упрощенное уравнение оптимального фильтра запишется так:

$$K_{\text{опт}}^{\Sigma}(u) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2} D\varphi(u)}}{A(u) \left[e^{-\frac{1}{2} D\varphi(u)} - \frac{1}{n} e^{-D\varphi(u)} + \frac{1}{n} \right]}. \quad (18)$$

При $n \rightarrow \infty$ $K_{\text{опт}}^{\Sigma}(u)$ совпадает с выражением (15). Средняя квадратичная ошибка после фильтрации составляет

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{опт}}^{\Sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-u_{\text{гр}}}^{u_{\text{гр}}} |\tilde{T}(u)|^2 \left(1 - \frac{e^{-D\varphi(u)}}{e^{-D\varphi(u)} - \frac{1}{n} e^{-D\varphi(u)} + \frac{1}{n}} \right) du, \quad (19)$$

при $n \rightarrow \infty$ $\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{опт}}^{\Sigma} \rightarrow 0$. На рис. 4 показана зависимость отношения $\frac{\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{опт}}^n}{\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{опт}}^{\Sigma}}$ от граничной пространственной частоты. Из рисунка становится ясным, что накопление фаз пространственных гармоник является более предпочтительным по сравнению с накоплением всего радиоизображения, получаемого при наблюдениях на сплошной антенне, причем существуют такие значения интенсивностей случайных фазовых сдвигов, при которых это различие в эффективности накопления становится особенно существенным (область минимума кривой на рис. 4).

Таким образом, показано, что и при фазовых искажениях накопление сигнала позволяет восстановить с определенной точностью исходное распределение радиояркости объекта. Точность воспроизведения зависит от числа усреднений и уровня аддитивных шумов.

Литература

1. А. Н. Ломакин, Электросвязь, № 8, 29, 1966.
2. R. L. Mitchell, Trans. IEEE, vol. AP-14, 324, May 1966.
3. G. R. Heidbreder, Trans. IEEE, vol. AP-15, 90, Jan. 1967.
4. R. N. Bracewell and J. A. Roberts, Austr. J. Phys., 7, 615, Dec. 1954.
5. R. E. Hufnagel and N. R. Stanley, J. opt. Soc. Am., 54, 52, Jan. 1964.
6. Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков. Выделение сигналов на фоне случайных помех. «Советское радио», 1960.
7. D. Slepian, J. opt. Soc. Am., 57, 918, July 1967.

Ноябрь 1969 г.
